Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoires
aux Grandes Écoles
Khouribga

Année scolaire : 2017/2018
Filière **MP**

Devoir surveillé commun $n°1$

23/09/2017

durée : 3 heures

•••••••••

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

•••••••••

Exercice 1

Soit $(G,+)$ un groupe. Une fonction $f:\ G \to G$ est dite naturellement inversible lorsque f est une bijection vérifiant

$$\forall x \in G,\ \ f^{-1}(x) = -f(x).$$

On suppose par la suite que f est naturellement inversible.

1. Montrer que $\forall x \in G,\ \ f^2(x) = f \circ f(x) = -x.$
2. Montrer que $\forall x \in G,\ \ f^{-1}(x) = f(-x).$
3. Montrer que $f^4 = \mathrm{Id}_G$ (Id_G désigne l'application identité de G).
4. Soit g un automorphisme de G. Montrer que $\forall x \in G$, $g(-x) = -g(x)$.
5. Soit g un automorphisme de G, montrer que g est naturellement inversible si, et seulement si, $\forall x \in G$, $g^2(x) = -x$.
6. Conclure que tout groupe qui possède un automorphisme naturellement inversible est commutatif.

Exercice 2 : Quelques propriétés de crochet de Lie

Soit A un anneau. On pose $[x,y] = xy - yx$.

1. Montrer que la loi $(x,y) \mapsto [x,y]$ est distributive par rapport à l'addition, et que

$$\forall x,y \in A,\ \ [x,y] = -[y,x],$$
$$\forall x,y,z \in A,\ \ [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0.$$

2. Montrer que pour tout $x \in A$ fixé, l'application $\varphi_x:\ y \mapsto [x,y]$ est telle que

$$\varphi_x(y+z) = \varphi_x(y) + \varphi_x(z).$$

   Calculer $\varphi_x([y,z])$.
3. Soit $x \in A$, on note $K_x = \{y \in A / \varphi_x(y) = 0\}$. Montrer que K_x est stable pour l'addition et la loi $[,]$.
4. Préciser K_0 et K_1.
5. Soient $x,b \in A$, on note $S(x,b)$ l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue y,

$$\varphi_x(y) = b.$$

   On suppose qu'il existe $y_0 \in S(x,b)$, montrer que $S(x,b) = y_0 + K_x$.

6. Que peut-on conclure sur $S(x, b)$?

On suppose à partir de maintenant que $A = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

7. Déterminer $S(A, 0)$ et $S(B, 0)$.

8. Montrer que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $S(M, I_n) = \varnothing$.

9. Cas particulier : $n = 2$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $S(C, C)$.

Problème : Nombres algébriques

Dans tout le problème le corps des scalaires est $\mathbb{Q}$ (c'est-à-dire que les espaces vectoriels considérés sont tous des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels). En particulier, $\mathbb{C}$ est considéré comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel (ce qui est légitime car $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$).

Définition (nombre algébrique/transcendant) : Un nombre $z \in \mathbb{C}$ est dit algébrique s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ non nul, tel que $P(z) = 0$ (un tel polynôme P est appelé polynôme annulateur de z). Le nombre z est dit transcendant s'il n'est pas algébrique.

Définition (idéal de $\mathbb{K}[X]$) : Un idéal de $\mathbb{K}[X]$ est une partie I non vide de $\mathbb{K}[X]$ telle que :
$-\forall P_1, P_2 \in I$, $P_1 + P_2 \in I$,
$-\forall P \in I$, $\forall Q \in \mathbb{Q}[X]$, $QP \in I$.
On notera $\mathbb{A}$ l'ensemble des nombres algébriques. L'objectif du problème est de prouver que $\mathbb{A}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

1. **a)** Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$. Montrer que l'ensemble $PQ[X] = \{PQ / Q \in \mathbb{Q}[X]\}$ est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$.

b) Montrer que $P_1\mathbb{Q}[X] = P_2\mathbb{Q}[X]$ si, et seulement si, P_1 et P_2 sont associés.

c) Soit I un idéal de $\mathbb{Q}[X]$, non réduit à $\{0\}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire P tel que $I = P\mathbb{Q}[X]$. *(On pourra, pour la preuve, s'inspirer de la description des sous-groupes de $\mathbb{Z}$ vue en cours d'arithmétique.)*

d) Montrer que l'ensemble $\{P \in \mathbb{Q}[X] / P(z) = 0\}$ des polynômes annulateurs de z est un idéal que $\mathbb{Q}[X]$, non réduit à $\{0\}$ si, et seulement si, z est algébrique.

2. Si z est algébrique, on notera m_z l'unique polynôme unitaire de $\mathbb{Q}[X]$ tel que

$$\{P \in \mathbb{Q}[X] / P(z) = 0\} = m_z\mathbb{Q}[X]$$

m_z est appelé le « polynôme minimal de z. On note d_z le degré de m_z, ou simplement d en l'absence d'ambiguïté sur z. Montrer que m_z est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

3. **a)** Montrer que $\sqrt{2}$ est algébrique, et déterminer $m_{\sqrt{2}}$.

b) Montrer que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est algébrique, et déterminer m_j

c) Montrer que tout rationnel r est algébrique (c'est-à-dire que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$), et déterminer m_r.

d) Montrer $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ est algébrique.

e) Soit z algébrique, et $P \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire, irréductible dans $Q[X]$, tel que $P(z) = 0$. Montrer que $P = m_z$.

f) Déterminer $m_{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

4. Montrer que l'inverse d'un nombre algébrique non nul est algébrique.

5. Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $\mathbb{Q}[z] = \{P(z) / P \in \mathbb{Q}[X]\} = \{w \in \mathbb{C} / \exists P \in \mathbb{C}[X] \text{ et } w = P(z)\}$.

a) Vérifier que $\mathbb{Q}[z]$ est exactement le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par la famille $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Montrer que z est algébrique si, et seulement si, la famille $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est liée.

6. **a)** Si z est algébrique, montrer que la famille $(1, z, z^2, ..., z^{d-1})$ est libre, où $d = d_z$.

b) Montrer alors que cette famille est une base de $\mathbb{Q}[z]$.

c) En déduire que z est algébrique si, et seulement si, le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}[z]$ est de dimension finie.

7. On suppose ici également que z est algébrique.

a) Soit $w \in \mathbb{Q}[z]\backslash\{0\}$, et $P_w \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $w = P_w(z)$. Justifier que P_w et m_z sont premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$.

b) Déduire de ce qui précède que $\mathbb{Q}[z]$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

8. Soient α et β deux nombres algébriques. On note $\mathbb{Q}[\alpha, \beta] = \mathrm{Vect}(\{\alpha^p\beta^q/(p, q) \in \mathbb{N}^2\})$.

a) En déduire que $(\alpha^k\beta^l)_{0\leq k<d_\alpha, 0\leq l<d_\beta}$ est une famille (finie) génératrice de $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$. On vient de prouver que $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est de dimension finie.

b) En utilisant la question précédente et la question 5.b, déduire que $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ sont algébriques.

9. Conclure.

FIN DE L'ÉPREUVE