Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoires
aux Grandes Ecoles
Khouribga

Année scolaire : 2017/2018
Filière **MP**

Devoir surveillé commun n○2

21/10/2017

durée : 4 heures

••••••••

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

••••••••

Exercice 1

On désigne par $\mathscr{P}$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 1-périodiques à valeurs dans $\mathbb{C}$. On pose pour $f \in \mathscr{P}$,

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)| \sin^2(2\pi t)\mathrm{d}t.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de $\mathscr{P}$ vérifiant $\forall t \in [0,1],\ \ f_n(t) = t^n(1-t)^n$.

1. Montrer que $(\mathscr{P}, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.
2. Représenter sur un même graphique f_0, f_1 sur l'intervalle $[-1,2]$.
3. Montrer que la suite converge vers la fonction nulle dans $(\mathscr{P}, \|.\|)$.
4. Montrer que $\varphi :\ f \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} f(t)\sin^2(2\pi t)\mathrm{d}t$ est une forme linéaire continue sur $\mathscr{P}$.

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Montrer que, quelque soit la norme choisie sur E, l'application

$$\Phi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & XP' \end{array}$$

n'est pas continue.

2. On note E_0 le sous-espace de E constitué des polynômes nuls en 0

$$E_0 = \{P \in E :\ P(0) = 0\}.$$

a) Montrer que Φ est une bijection de E_0 sur E_0.

b) Pour tout $P \in E$, on note

$$N(P) = \sum_{k=0}^{d} |a_k|, \;\; \forall P = a_0 + a_1 X + ... + a_d X^d \in E.$$

Montrer que N est une norme sur E (et donc sur E_0 qui est un sous-espace de E).

c) Montrer que Φ^{-1} est continue sur (E_0, N). Calculer sa norme $|||\Phi^{-1}|||$.

3. On pose maintenant

$$\forall P \in E, \;\; \|P\| = \sup_{[0,1]} |P(x)|.$$

a) Montrer qu'il s'agit d'une norme sur E.

b) Montrer que

$$\forall P \in E, \;\; \|P\| \leq N(P).$$

c) Montrer qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que

$$\forall P \in E, \;\; N(P) \leq C\|P\|.$$

(Indication : On pourra considérer la suite des polynômes $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k X^k, \;\; \forall n \in \mathbb{N}^*$ *)*

Problème

Partie I : Normes sur l'espace des fonctions polynomiales réelles sur $[0, 1]$

On désigne par E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles sur $[0, 1]$. On identifiera polynôme et fonction polynomiale.
On rappelle la formule de Taylor pour les polynômes :

$$\forall P \in E, \;\; P(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} X^n. \text{ (\textit{il s'agit d'une somme finie})}$$

On note respectivement $\|.\|_\infty$, $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ les normes usuellement définies sur E par :

$$\forall P \in E, \;\; \|P\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|, \;\; \|P\|_1 = \int_0^1 |P(x)| \mathrm{d}x, \;\; \|P\|_2 = \left(\int_0^1 |P(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour tout entier naturel n, et toute fonction polynomiale $P \in E$, on note :

$$\nu_n(P) = \int_0^1 P(x) x^n \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que : $\forall P \in E, \;\; \lim_{n \to \infty} \nu_n(P) = 0$.

2. Montrer que, pour tout polynôme $P \in E$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\nu_n(P)|$ existe. On pose alors

$$\nu(P) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\nu_n(P)|.$$

Montrer que l'application ν définit une norme sur E.

3. Montrer que, pour tout polynôme $P \in E$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\nu(P) = |\nu_{n_0}(P)|$, c'est-à-dire la borne supérieure est atteinte).

(*Indication : utiliser la définition de la limite avec* $\varepsilon = \dfrac{\nu(P)}{2}$ *si* $\nu(P) > 0$)

4. Montrer que, pour tout polynôme $P \in E$ on a :

$$\nu(P) \leq \|P\|_1 \leq \|P\|_2 \leq \|P\|_\infty.$$

5. Soit N l'une des normes ν, $\|.\|_1$, $\|.\|_2$, $\|.\|_\infty$ sur E :

a) Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions polynomiales définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; \forall x \in [0,1], \;\; P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Montrer que cette suite est de Cauchy dans (E, N).

b) L'espace norme (E, N) est-il complet ?

6. On rappelle que deux normes N_1 et N_2 sur un espace vectoriel réel E sont équivalentes s'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que :

$$\forall x \in E, \;\; \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) les normes N_1 et N_2 sur E sont équivalentes,

b) une suite est de Cauchy dans (E, N_1) si, et seulement si, elle est de Cauchy dans (E, N_2),

c) une suite est convergente dans (E, N_1) si, et seulement si, elle est convergente dans (E, N_2).

7. Montrer que si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E, alors (E, N_1) est complet si, et seulement si, (E, N_2) est complet.

8. **a)** Montrer que les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ [resp. $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$] ne sont pas équivalentes.

b) Montrer que les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes.

c) Montrer que les normes ν et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

9. Pour tout réel $\alpha \in [0,1]$ on désigne par φ_α la forme linéaire définie sur E par :

$$\forall P \in E, \;\; \varphi_\alpha(P) = P(\alpha).$$

a) Soient $\|.\|$ une norme sur E et $\alpha \in [0,1]$. Montrer que φ_α est continue si, et seulement si, il existe une constante réelle $M_\alpha > 0$ telle que $|\varphi_\alpha(P)| \leq M_\alpha \|P\|$ pour tout $P \in E$.

b) Existe-t-il une une norme $\|.\|$ sur E telle que toutes les formes linéaires φ_α soient continues.

(*Indication : Considérer l'application définie par* $\forall P \in E$, $\|P\| = \sum_{n=0}^{\infty} |P^{(n)}(0)|$.)

c) Soit N l'une des normes ν, $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur E. Déterminer l'ensemble C_N des réels $\alpha \in [0,1]$ tels que φ_α soit continue de (E, N) dans $\mathbb{R}$.

Partie II : Normes sur l^1

On désigne par l^1 l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ soit absolument convergente.

On rappelle que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est convergente si, et seulement si, la suite de somme partielle $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$, est convergente et on rappelle aussi que toute série absolument convergente de nombres réelles est convergente.

On note $\|.\|_1$ la norme sur l^1 définie par :

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1, \ \ \|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|.$$

1. Montrer que l^1 est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour toutes suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l^1, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n$ est absolument convergente et que l'application :

$$(x, y) \mapsto (x|y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$$

définit un produit scalaire sur E. On note $\|.\|_2$ la norme associée.

3. Les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont-elles équivalentes sur l^1 ?

4. Montrer que $(l^1, \|.\|_1)$ est complet.

5. L'espace $(l^1, \|.\|_2)$ est-il complet ?

6. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on désigne par π_n l'application qui à $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$ associe le réel $\pi_n(x) = x_n$.

Montrer que les applications π_n sont des formes linéaires continues sur $(l^1, \|.\|_1)$ et sur $(l^1, \|.\|_2)$.

7. Une forme linéaire φ sur l^1 qui est continue pour $\|.\|_1$, est-elle combinaison linéaire de π_n ?

FIN DE L'ÉPREUVE