Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoires
aux Grandes Ecoles
Khouribga

Année scolaire : 2017/2018
Filière **MP**

Devoir surveillé commun $n°3$

25/11/2017

durée : 4 heures

•••••••••

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

•••••••••

Exercice

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme euclidienne canonique $\|.\|$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = xye^{-\sqrt{x^2+y^2}}$$

1. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ et calculer $df_{(0,0)}$.

2. Calculer les dérivées partielles de f en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer $df_{(x,y)}(h,k)$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$.

4. On note $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$.

a) Montrer que pour tout $(x,y) \in B$, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq |y|e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq |x|e^{-\sqrt{x^2+y^2}}.$$

b) Montrer que pour tout $(x,y) \in B$, on a

$$\|df_{(x,y)}(h,k)\| \leq \frac{1}{e}\|(h,k)\|, \quad \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$$

Indication : Utiliser l'inégalité $\forall t \in \mathbb{R}, \quad te^{-t} \leq \dfrac{1}{e}$.

c) En déduire que $\forall (x,y), \ (x',y') \in B$, on a

$$|f(x,y) - f(x',y')| \leq \frac{1}{e}\|(x,y) - (x',y')\|.$$

Problème

Dans tout le problème n est un entier supérieur ou égal à 3. On notera O_n la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et I_n la matrice identité. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$ on notera $\mathscr{B}_n$ la base canonique $\mathscr{B}_n = (1, X, X^2, ...X^n)$. Dans tout le problème on considère l'application f_n qui à tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le polynôme

$$f_n(P) = \frac{X^2 - 1}{2} P'' - XP' + P$$

Préliminaire

1. Montrer que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

Première partie

Dans toute cette partie on étudie le cas particulier $n = 3$

2. Ecrire la matrice M_3 de f_3 dans la base $\mathscr{B}_3$.
3. Déterminer une base du noyau de f_3 puis une base de l'image de f_3. Ces deux sous-espaces vectoriels sont-ils supplémentaires ?
4. Montrer que f_3 est un projecteur. L'endomorphisme f_3 est-il diagonalisable de $\mathbb{C}_3[X]$?

Deuxième partie

Dans toute cette partie on étudie le cas particulier $n = 4$.

5. Ecrire la matrice M_4 de f_4 dans la base $\mathscr{B}_4$.
6. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f_4. f_4 est-il diagonalisable ?
7. Montrer qu'il existe deux matrices A et B vérifiant :

$$\begin{cases} M_4 = A + B \\ A^2 = A \\ B^2 = 3B \\ AB = BA = 0_4 \end{cases}$$

   Déterminer le rang de A et le rang de B.

8. Montrer que pour tout entier naturel $n > 0$, la matrice M_4^n est combinaison linéaire de A et B et déterminer les scalaires α_n et β_n tels que $M^n = \alpha_n A + \beta_n B$.

Troisième partie

Dans toute cette partie on étudie f_n pour $n \geq 5$.

9. Montrer que si P est élément du noyau de f_n alors $\deg(P) \leq 2$. En déduire le noyau de f_n.
10. Montrer que $(f_n(1), f_n(X^3), f_n(X^4), ...f_n(X^n))$ constitue une base de l'image de f_n.
11. Déterminer les valeurs propres de f_n. f_n est-il diagonalisable ?

12. Soit ϕ_1 et ϕ_2 deux applications linéaires de $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}$. On suppose ϕ_1 et ϕ_2 non nulles et non proportionnelles.

    a) Montrer $\dim(\text{Ker}(\phi_1)) = \dim(\text{Ker}(\phi_2)) = n$.

    b) Montrer que $\dim(\text{Ker}(\phi_1) \cap \text{Ker}(\phi_2)) = n - 1$.

13. Soit Q un polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$

    a) Montrer que si $Q = f_n(P)$ alors :
$$Q' = \frac{X^2 - 1}{2} P^{(3)}$$

    b) Montrer
$$Q \in \text{Im}(f) \iff (Q'(1) = Q'(-1) = 0).$$

14. Soit $Q = f_n(P)$ un polynôme de $\text{Im}(f_n)$.
    Déterminer deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers tels que pour tout entier $k \geq 0$:
$$Q^{(k)} = \frac{X^2 - 1}{2} P^{(k+2)} + \alpha_k X P^{(k+1)} + \beta_k P^{(k)}.$$

Quatrième partie

Dans toute cette partie λ est une valeur propre de f_n et S est un polynôme de degré $p \geq 0$ vérifiant $f_n(S) = \lambda S$.

15. Exprimer λ en fonction de p.

16. On suppose dans cette question $p \leq 3$.

    a) Montrer que λ est égal à 0 ou à 1.

    b) Déterminer alors tous les polynômes vérifiant $f_n(S) = \lambda S$.

16. On suppose désormais $p \geq 4$.

    a) Montrer que $\lambda > 1$

    b) Montrer que $S(1) = S'(1) = 0$.

    c) On suppose $S''(1) = 0$, montrer $\forall k \geq 3$, $S^{(k)}(1) = 0$.

    d) Montrer que 1 et -1 sont des racines doubles de S.

    e) Calculer S si $p = 4$.

17. On suppose désormais $p \geq 5$ et on considère le polynôme $T = S(-X)$.

    a) Exprimer $f_n(T)$ en fonction de T.

    b) En déduire que si p est un entier pair alors S est un polynôme pair.

    c) Montrer que si p est un entier impair alors 0 est racine de S.

    d) Calculer S si $p = 5$.

18. Montrer que si x_o est une racine de S autre que -1 ou 1 alors x_o est racine simple de S.

FIN DE L'ÉPREUVE

Tournez la page S.V.P.