Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoires
aux Grandes Ecoles
Khouribga

Année scolaire : 2017/2018
Filière **MP**

DEVOIR SURVEILLÉ COMMUN N°4

13/01/2018

durée : 4 heures

••••••••

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

••••••••

Exercice

Considérons la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ de terme général u_n définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ et soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de sommes partielles associée.

1. Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul k : $\dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 x^{k-1}\mathrm{d}x$.

b) En déduire que : $S_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x}\mathrm{d}x$, puis que $S_n = \ln(2) + (-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.

2. Soit n un entier naturel non nul. En encadrant la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur $[0,1]$, montrer que :

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n+1}.$$

3. Établissons la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|S_n - \ln(2)| \leq \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge et préciser sa limite.

c) À l'aide de la question précédente, déterminer un entier naturel p tel que :

$$|S_p - \ln(2)| \leq 10^{-4}.$$

Problème

Dans tout le problème, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sera muni du produit scalaire usuel noté $(\cdot|\cdot)$ et de la norme correspondante $\|\cdot\|$. On notera $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et n colonnes, à coefficients réels, et I la matrice identité ; on munira $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme usuelle :

$$\|A\| = \sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}, x \neq 0\right\}.$$

Une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ sera dite *s-positive* si l'on a $(Ax|x) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^n$.

Première partie

1. Montrer que toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique A_s et d'une matrice antisymétrique A_a.

2. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur les valeurs propres de A_s, pour que A soit s-positive.

Deuxième partie

3. Montrer que, pour toute matrice s-positive A et tout nombre réel $\lambda > 0$, la matrice $\lambda I + A$ est inversible.

On posera alors $R_\lambda(A) = (\lambda I + A)^{-1}$.

4. Étude d'exemples : On examinera les deux exemples suivants :

a) $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour chacun de ces exemples : calculer $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} A$, $R_\lambda(A)$, dire si $R_\lambda(A)$ (resp. $\lambda R_\lambda(A)$) admet une limite lorsque λ tend vers 0, si oui, donner cette limite.

Dans la suite de cette deuxième partie on se donne une matrice s-positive A et un réel $\lambda > 0$.

5. Démontrer les assertions suivantes :

a) $AR_\lambda(A) = R_\lambda(A)A = I - \lambda R_\lambda(A)$.

b) Pour tout réel $\mu > 0$, on a $R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A)$.

6. Démontrer l'inégalité $\|R_\lambda(A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$, avec égalité si et seulement si $\det A$ est nul.

7. Démontrer les assertions suivantes :

a) Pour tout $x \in \operatorname{Im} A$, $\lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda R_\lambda(A)x = 0$.

b) L'espace $\mathbb{R}^n$ est somme directe de $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$.

c) Lorsque λ tend vers 0, $\lambda R_\lambda(A)$ tend vers le projecteur sur $\operatorname{Ker} A$ parallèlement à $\operatorname{Im} A$.

8. Montrer que l'application $\Phi\ :\ \ \lambda \mapsto R_\lambda(A)$ de $]0,+\infty[$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est indéfiniment dérivable, et exprimer ses dérivées successives $\Phi^{(p)}$ en fonction de ses puissances $\Phi^q\ :\ \lambda \mapsto \Phi(\lambda)^q$.

Troisième partie

Dans cette troisième partie on se donne une application F de $]0,+\infty[$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possédant les propriétés suivantes :

(i) $\forall \lambda > 0, \|F(\lambda)\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$;

(ii) $\forall \lambda, \mu > 0, F(\lambda) - F(\mu) = (\mu - \lambda)F(\lambda)F(\mu)$;

(iii) $F(1)$ est inversible.

9. Montrer que $F(\lambda)$ est inversible pour tout $\lambda > 0$.

10. **a)** Calculer $F(\lambda)^{-1} - F(\mu)^{-1}$.

b) Montrer que, lorsque λ tend vers 0, $F(\lambda)^{-1}$ admet une limite A et que l'on a, pour tout $\lambda > 0$, $\lambda I + A = F(\lambda)^{-1}$.

11. Montrer que les matrices $AF(\lambda)$ et A sont s-positives.

Quatrième partie

12. Étant donné une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :

(i) La série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ est convergente. Notons $\exp A$ sa somme.

(ii) La fonction de variable réelle $t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable et sa dérivée est donnée par
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(tA) = A \exp(tA)$.

13. Soit une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer l'équivalence des conditions suivantes :

(i) pour tout $t \geq 0$, on a $\|\exp(-tA)\| \leq 1$;

(ii) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $t \mapsto \|\exp(-tA)x\|^2$ est décroissante ;

(iii) A est s-positive.

On fixe maintenant une matrice A s-positive et un réel $\lambda > 0$.

14. Démontrer la convergence des intégrales
$$\rho(\lambda)_{i,j} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \left(\exp(-tA)\right)_{i,j} \mathrm{d}t,\ 1 \leq i, j \leq n.$$
On note $\rho(\lambda)$ la matrice de coefficients $\rho(\lambda)_{i,j}$.

15. Comparer $\rho(\lambda)$ et $R_\lambda(A)$. [On pourra calculer d'abord $A\rho(\lambda) + \lambda\rho(\lambda)$.]

16. On considère le premier exemple de la question **4**. Calculer $\exp(-tA)$, puis $\rho(\lambda)$. Retrouver la valeur de $R_\lambda(A)$ obtenue à la question **4**.

FIN DE L'ÉPREUVE