Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoires
aux Grandes Ecoles
Khouribga

Année scolaire : 2017/2018
Filière **MP**

DEVOIR SURVEILLÉ COMMUN N°5

10/02/2018

durée : 4 heures

••••••••

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

••••••••

Exercice 1

1. Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle $I =]-a, a[$, (a fini ou non), telle que, pour tout entier naturel n et tout x dans I, on ait $f^{(n)}(x) \geq 0$. Montrer que f est développable en série entière dans I.

On pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral : pour tout x de I,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que la fonction $\tan$ est développable en série entière et trouver leur rayon de convergence.

Exercice 2

1. Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-kt}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. On note $J_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

2. Donner la valeur de J_k (on pourra utiliser l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

3. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}(t)}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On note $K = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}(t)}$.

4. **a)** Montrer que $K = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}(1+e^{-2t})} \mathrm{d}t$.

b) En déduire que $K = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$.

5. Montrer que $\dfrac{1}{2} < K < 1$.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \;\; x^2 y'' + 4xy' + (2+x^2)y = 2.$$

On cherche ses solutions qui sont développables en série entière au voisinage de 0. Soit $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une telle solution.

1. Par quelle relation de récurrence sont liés les coefficients a_n d'une série solution ?

2. Que vaut a_1 ? Plus généralement, que valent les a_n pour n pair ?

3. Quel est le rayon de convergence d'une série solution ?

4. Expliciter les coefficients a_n pour n pair

5. Écrire la fonction $z = x^2 y$ sous forme d'une série entière et en déduire une expression de la solution y trouvée.

6. Déterminer la solution générale de l'équation (E) en utilisant le changement de fonction inconnue :

$$y(x) = \frac{u(x)}{x^2}$$

En déduire que la solution trouvée ci-dessus est la seule solution de (E) qui soit développable en série entière au voisinage de 0.

Problème

La lettre α désigne un réel strictement supérieur à 1 ($\alpha > 1$), la lettre n désigne un entier supérieur ou égal à 1, ($n \geq 1$). Soit $u_n(\alpha)$ le réel défini par la relation :

$$u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}.$$

Première partie : Étude de la suite $(u_n(\alpha))_{n\geq 1}$

1. Convergence de la suite $(u_n(\alpha))_{n\geq 1}$.

a) Vérifier que, pour tous les réels α et entiers n considérés, le réel $u_n(\alpha)$ est bien défini. Démontrer que la suite $(u_n(\alpha))_{n\geq 1}$ est convergente en étudiant sa monotonie.

b) En partageant l'intervalle d'intégration $[0, +\infty[$ en trois intervalles, démontrer que, pour tout réel $a \in]0, 1[$, l'inégalité :

$$u_n(\alpha) \leq a + \frac{1}{(1 + a^\alpha)^n} + \frac{1}{n\alpha - 1}$$

a lieu.
En déduire la limite de la suite $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(\alpha)$.

2. Étude de suites et de séries liées à $(u_n(\alpha))_{n\geq 1}$.

a) Démontrer la relation ci-dessous liant $u_n(\alpha)$ et $u_{n+1}(\alpha)$:

$$(R) \;\; u_n(\alpha) = n\alpha(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha)).$$

Donner l'expression de $u_n(\alpha)$ en fonction de $u_1(\alpha)$.

b) Soit $U_n(\alpha) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(\alpha)$ la somme des n premiers termes de la série de terme général $u_n(\alpha)$. Déterminer $U_n(\alpha)$ en fonction $u_{n+1}(\alpha)$.
En déduire l'expression de $U_n(\alpha)$ en fonction de $u_1(\alpha)$.
Démontrer que la série de terme général $u_n(\alpha)$, $n \geq 1$, est divergente.

c) Soit $(v_n(\alpha))_{n\geq 1}$ la suite de terme général :

$$v_n(a) = \frac{u_n(\alpha)}{n}.$$

Démontrer que la somme partielle $V_n(\alpha) = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k(\alpha)$ s'exprime à l'aide des deux réels $u_1(\alpha)$ et $u_{n+1}(\alpha)$.
En déduire que la série de terme général $v_n(\alpha)$, $n \geq 1$, est convergente et calculer sa somme en fonction de $u_1(\alpha)$.

3. Soit $(w_n(\alpha))_{n\geq 1}$ la suite des réels définis par la relation :

$$w_n(a) = \ln(u_n(\alpha)) + \frac{\ln(n)}{\alpha}.$$

Démonter que la série de terme général $(w_{n+1}(a) - w_n(\alpha))$, $n \geq 1$, est convergente. En déduire l'existence d'un réel $K(\alpha)$ tel que le réel $u_n(\alpha)$ soit équivalent à infiniment petit :

$$\frac{K(\alpha)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Deuxième partie : Fonction Γ, limite du produit $n^{\frac{1}{\alpha}} u_n(\alpha)$.

Soit Γ la fonction définie par l'intégrale :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de cette fonction Γ. Établir, pour tout x de l'ensemble de définition, la relation :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Démontrer que cette fonction est continue sur $[1, a]$ ($a > 1$), en déduire la continuité de la fonction Γ sur l'ensemble de définition.

2. Un équivalent de $u_n(\alpha)$)

a) Soit $c_n(\alpha)$ le réel défini par la relation : $c_n(\alpha) = \alpha n^{\frac{1}{\alpha}} u_n(\alpha)$. Établir la relation, pour tout $t \geq 0$

$$e^{-nt^\alpha} \leq \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}$$

En déduire une minoration simple de $c_n(\alpha)$ a l'aide de $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

b) Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Démontrer qu'il existe un réel $a \in]0, 1[$, tel que pour tout réel $t \in [0, a]$, les deux inégalités :

$$t(1-\varepsilon) \leq \ln(1+t),$$
$$\frac{1}{(1+t^\alpha)^n} \leq \exp(-n(1-\varepsilon)t^\alpha),$$

aient lieu.

c) En déduire un majorant du réel $c_n(\alpha)$ qui s'exprime à l'aide du réel $v_n(\alpha, \varepsilon)$ défini par la relation :

$$v_n(\alpha, \varepsilon) = \int_0^\alpha \exp(-n(1-\varepsilon)t^\alpha \mathrm{d}t + \frac{1}{(1+a^\alpha)^n} + \frac{1}{n\alpha - 1}.$$

Déterminer, pour ε fixé, la limite du réel $\alpha n^{\frac{1}{\alpha}} v_n(\alpha, \varepsilon)$ lorsque n croît indéfiniment.

d) À partir des résultats précédents. Déterminer la limite de la suite $(c_n(\alpha))_{n \geq 1}$, puis un infiniment petit équivalent à $u_n(\alpha)$.

3. En déduire la valeur du réel $K(\alpha)$ défini ci-dessus au moyen de la fonction Γ.

FIN DE L'ÉPREUVE