Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoires
aux Grandes Ecoles
Khouribga

Année scolaire : 2017/2018
Filière **MP**

DEVOIR SURVEILLÉ

COMMUN N° 6

17/03/2018

durée : 4 heures

•••••••••

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

•••••••••

Exercice

1. Montrer l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\, dt$. En déduire la convergence des intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \cos(t^2)\, dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\, dt$$

Dans la suite, on posera $K = I + iJ$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{ixt^2}}{1+t^2}\, dt$$

   (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \int_0^1 e^{ixt^2}\, dt = 0$$

   et en déduire la limite de f en $+\infty$.

   (c) Trouver un équation différentielle vérifiée par f, et en déduire une relation entre f et la fonction g définie par

$$\forall x \geqslant 0 \quad g(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2}\, du$$

3. En déduire la valeur des intégrales I et J.

Problème

Dans tout le problème, k désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Notations algébriques

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices-colonnes à n lignes à coefficients réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients réels. On identifie les ensembles $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ en assimilant une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.
- La base canonique de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ est notée $\mathcal{C}_k = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$ et l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne usuelle pour laquelle la base $\mathcal{C}_k$ est orthonormale. On note $\langle u, v \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs u et v de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ et $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ la norme du vecteur u.
- Pour toute matrice-colonne d de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes $d_1, d_2, \ldots, d_n$, on note $\mathrm{Diag}(d)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\mathrm{Diag}(d) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}.$$

- La transposée d'une matrice M est notée ${}^tM$ et I_k désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.

Notations probabilistes

- Toutes les variables aléatoires et tous les vecteurs aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définis sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- On dit qu'un vecteur aléatoire discret $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, admet une espérance lorsque chacune de ses composantes en admet une.

  On note Y la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ de composantes $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ et $\mathcal{E}(Y)$ la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ dont les composantes sont les espérances $E(Y_1), E(Y_2), \ldots, E(Y_k)$.

Lorsque chacune des composantes Y_i ($i \in [\![1, k]\!]$) admet une variance, on appelle matrice de variance-covariance de Y, notée $\mathcal{V}(Y)$, la matrice symétrique de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les variances $V(Y_i)$ et les coefficients non diagonaux les covariances $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$ pour tout $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$ avec $i \neq j$.

En résumé, on pose sous réserve d'existence :

$$\mathcal{E}(Y) = \begin{pmatrix} E(Y_1) \\ E(Y_2) \\ \vdots \\ E(Y_k) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}(Y) = \begin{pmatrix} V(Y_1) & \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(Y_1, Y_k) \\ \mathrm{Cov}(Y_2, Y_1) & V(Y_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(Y_2, Y_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(Y_k, Y_1) & \mathrm{Cov}(Y_k, Y_2) & \cdots & V(Y_k) \end{pmatrix}.$$

- Dans tout le problème, on note $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix}$ une matrice-colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ et pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $p_i \geqslant 0$.

L'objet du problème est l'étude des propriétés des matrices de variance-covariance en liaison avec la loi des vecteurs aléatoires correspondants.

Partie I. Lois généralisées de Bernoulli

Dans cette partie, on note u la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Soit $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$ une matrice-colonne non nulle de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ et $\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i$. On pose : $M = a\,{}^tu$.

   a) Calculer la matrice M et préciser son rang.

   b) Calculer la matrice Ma et en déduire une valeur propre de M.

   c) Montrer que $M^2 = \alpha M$. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de M ?

   d) Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $\alpha \neq 0$.

e) Pour quelles valeurs de α la matrice $I_k - M$ est-elle inversible ?

f) On suppose que $\alpha = 1$. Montrer que M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^k$ d'un projecteur dont on précisera l'image et le noyau. Dans quel cas ce projecteur est-il orthogonal ?

On dit qu'un vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ suit la *loi généralisée de Bernoulli de paramètre* p, notée $\mathcal{B}_k(p)$, si on a :

$$\forall i \in [\![1, k]\!],\ P([X = e_i]) = p_i,\ \text{ avec } X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix}.$$

2. Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ un vecteur aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}_k(p)$.

a) Pour $i \in [\![1, k]\!]$, comparer les événements $[X = e_i]$ et $[X_i = 1]$; en déduire que chaque variable aléatoire X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i et écrire la matrice $\mathcal{E}(X)$.

b) Quelle est la loi de la variable aléatoire $X_1 + X_2$?

c) Montrer que $\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = -p_1 p_2$.

d) Écrire la matrice $\mathcal{V}(X)$.

3. Soit $M(p)$ la matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ définie par : $M(p) = p\,{}^t u$.

a) Vérifier l'égalité : $\mathcal{V}(X) = (I_k - M(p))\operatorname{Diag}(p)$.

b) Montrer que si $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont différents de 0, le rang de $\mathcal{V}(X)$ est égal à $k - 1$.

c) Soit σ une permutation de $[\![1, k]\!]$ et p_σ la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ de composantes $p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}, \ldots, p_{\sigma(k)}$. Montrer que $\mathcal{V}(X)$ est semblable à $(I_k - p_\sigma {}^t u)\operatorname{Diag}(p_\sigma)$.

d) Exprimer le rang de $\mathcal{V}(X)$ en fonction du nombre d'éléments i de $[\![1, k]\!]$ pour lesquels on a $p_i \neq 0$.

Partie II. Tirages avec remise dans une population stratifiée

Dans cette partie, on suppose que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on a $p_i > 0$ et que $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont les proportions d'individus appartenant aux diverses catégories d'une population statistique scindée en k catégories distinctes.

Pour modéliser une suite illimitée de tirages équiprobables avec remise effectués dans cette population, on utilise des variables aléatoires $X_i^{(n)}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \in [\![1, k]\!],\ X_i^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{si l'individu extrait au } n\text{-ième tirage appartient à la } i\text{-ème catégorie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On suppose que les vecteurs aléatoires $(X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \ldots, X_k^{(n)})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ suivent chacun la loi $\mathcal{B}_k(p)$ (partie I) et sont mutuellement indépendants. Cette indépendance mutuelle signifie que pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour toutes fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ définies sur $\mathbb{R}^k$ à valeurs réelles, les variables aléatoires $\varphi_1(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \ldots, X_k^{(1)})$, $\varphi_2(X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \ldots, X_k^{(2)})$, ..., $\varphi_n(X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \ldots, X_k^{(n)})$ sont indépendantes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $X^{(n)}$ la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ de composantes $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \ldots, X_k^{(n)}$ et $S^{(n)}$ la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ de composantes $S_1^{(n)}, S_2^{(n)}, \ldots, S_k^{(n)}$, où pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on a $S_i^{(n)} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} X_i^{(j)}$.

4.a) Préciser l'ensemble N_n des matrices-colonnes s de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ pour lesquelles on a $P([S^{(n)} = s]) > 0$.

b) Déterminer les lois respectives des deux variables aléatoires $S_1^{(n)}$ et $S_1^{(n)} + S_2^{(n)}$. Sont-elles indépendantes ?

c) Montrer que $\mathcal{V}(S^{(n)}) = n\,\mathcal{V}(X^{(1)})$.

5. Soit H un élément de $\mathcal{A}$ vérifiant $0 < P(H) < 1$, $\overline{H}$ l'événement contraire de H et W une variable aléatoire discrète admettant une variance.

a) Justifier l'existence de $E(W^2|H)$, espérance de W^2 pour la probabilité conditionnelle P_H.

b) On pose : $V(W|H) = E(W^2|H) - \big(E(W|H)\big)^2$ (variance de W pour la probabilité conditionnelle P_H).

En utilisant le système complet d'événements $(H, \overline{H})$ et la formule de l'espérance totale pour W et W^2, établir l'inégalité : $V(W) \geqslant P(H)\,V(W|H)$.

6. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note T_i le temps d'attente du premier tirage d'un individu de la i-ème catégorie et on note T la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ de composantes $T_1, T_2, \ldots, T_k$.

a) Soit $i \in [\![1, k]\!]$. Justifier que la probabilité que T_i soit infini est nulle. Quelle est la loi de T_i ?

b) On pose : $H_k = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{k-1} [T_i = i]$. Calculer $P(H_k)$. Préciser la loi conditionnelle de $T_k - (k-1)$ sachant H_k.

En déduire $E(T_k|H_k)$ et $V(T_k|H_k)$.

c) En exploitant le résultat de la question 5.b), établir pour tout vecteur $v = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ de $\mathbb{R}^k$, l'inégalité :

$$V\left(\sum_{i=1}^{k} v_i T_i\right) \geqslant \frac{v_k^2(1-p_k)}{p_k^2} \times \prod_{i=1}^{k-1} p_i\,.$$

d) Montrer plus généralement que pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, on a : $V\left(\sum_{i=1}^{k} v_i T_i\right) \geqslant \frac{v_j^2(1-p_j)}{p_j^2} \times \prod_{\substack{i\in[\![1,k]\!]\\ i\neq j}} p_i$.

Partie III. Support et rang stochastiques d'un vecteur aléatoire

Dans toute cette partie, $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$ désigne un vecteur aléatoire discret, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, dont chaque composante admet une espérance et une variance. On rappelle que Y est la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ de composantes $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$.

7. On appelle *support vectoriel* de Y, tout sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ tel que $P([Y - \mathcal{E}(Y) \in F]) = 1$. On note $\mathcal{S}(Y)$ l'ensemble des supports vectoriels de Y.

   a) Justifier l'existence d'un plus petit élément de l'ensemble des dimensions des éléments de $\mathcal{S}(Y)$. Ce plus petit élément est appelé le *rang stochastique* de Y et noté $R_s(Y)$.

   b) Dans quels cas le rang stochastique $R_s(Y)$ est-il nul ?

   c) Montrer que l'intersection de deux supports vectoriels F_1 et F_2 de Y est un support vectoriel de Y.

   d) En déduire l'existence d'un unique élément F de $\mathcal{S}(Y)$ tel que la dimension de F soit égale à $R_s(Y)$. L'espace vectoriel F est appelé le *support stochastique* de Y.

8. Soit u une matrice-colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ de composantes $u_1, u_2, \ldots, u_k$.

   a) Montrer que la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{k} u_i Y_i$ admet une variance, égale à ${}^t u\, \mathcal{V}(Y) u$.

   b) Établir l'existence d'un unique vecteur $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ de $\mathbb{R}^k$ tel que $\mathcal{V}(Y)$ soit semblable à la matrice $\mathrm{Diag}(\lambda)$ et pour lequel $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k \geqslant 0$ (on note $\mathrm{Diag}(\lambda)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ de coefficients diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$).

   c) On pose : $\|Y - \mathcal{E}(Y)\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \big(Y_i - E(Y_i)\big)^2$. Montrer que $E(\|Y - \mathcal{E}(Y)\|^2) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$.

9. Soit $q \in [\![1, k]\!]$, F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ de dimension q et $(f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(q)})$ une base orthonormale de F.

   a) Soit $\omega \in \Omega$. Justifier l'existence de $Q_F(\omega) = \mathrm{Inf}\{\|Y(\omega) - \mathcal{E}(Y) - x\|^2\,;\, x \in F\}$ et montrer que :

   $$\|Y(\omega) - \mathcal{E}(Y)\|^2 = Q_F(\omega) + \sum_{j=1}^{q} \langle Y(\omega) - \mathcal{E}(Y),\, f^{(j)} \rangle^2\,.$$

   b) À l'aide de la question 8, établir l'égalité : $E(Q_F) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i - \sum_{j=1}^{q} {}^t f^{(j)} \mathcal{V}(Y) f^{(j)}$.

   c) Que devient l'égalité précédente lorsque $F = \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$?

10.a) Montrer que pour toute matrice-colonne f de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $\|f\| = 1$, on a : ${}^t f\, \mathcal{V}(Y) f \leqslant \lambda_1$.

   b) En déduire la borne inférieure de $E(Q_F)$ lorsque F décrit l'ensemble des droites vectorielles de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$.

   c) Dans cette question, on suppose que $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$ suit la loi $\mathcal{B}_k(p)$, où pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on a $p_i = \dfrac{1}{k}$.

   Calculer les valeurs propres de $\mathcal{V}(Y)$ et la borne inférieure de $E(Q_F)$ pour l'ensemble des droites vectorielles F de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$, puis préciser pour quelle(s) droite(s) cette borne est atteinte.

11. On suppose que le rang r de $\mathcal{V}(Y)$ est non nul. On note F_0 la somme des sous-espaces propres associés aux valeurs propres non nulles de $\mathcal{V}(Y)$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ tel que $F \subset F_0$ et $F \neq F_0$.

   a) Calculer $E(Q_{F_0})$ et en déduire que F_0 est un support vectoriel de Y.

   b) Justifier l'existence d'un vecteur $f^{(r)}$ de F_0, orthogonal à F et de norme 1.

   c) Montrer que ${}^t f^{(r)} \mathcal{V}(Y) f^{(r)} > 0$ et en déduire que $E(Q_F) \neq 0$.

   d) Montrer que le rang stochastique $R_s(Y)$ de Y est égal à r.

Fin de l'épreuve