Devoir surveillé $n^\circ 1$

le 02/10/2018

durée : 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice

Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est *algébrique* s'il existe un polynôme Q non nul, à coefficients entiers, tel que $Q(a) = 0$. Un tel polynôme Q s'appelle polynôme annulateur pour a. On dit que a est *transcendant* si a n'est pas algébrique.

1. Montrer que 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-4\sqrt{3}$ sont algébriques, et trouver pour chacun d'eux un polynôme annulateur. Montrer que tout nombre rationnel est algébrique.

2. Montrer que si a est un réel algébrique non nul, alors $-a$ et $\frac{1}{a}$ sont algébriques et expliciter un polynôme annulateur de $-a$ et $\frac{1}{a}$.

3. Montrer que a est un réel algébrique si et seulement s'il existe un polynôme P à coefficients rationnels tel que $P(a) = 0$.

4. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $I_a = \{P \in \mathbb{Q}[X] / P(a) = 0\}$.
Montrer que I_a est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$.

5. En déduire que l'ensemble des polynômes annulant un nombre algébrique a est formé des multiples dans $\mathbb{Q}[X]$ d'un certain polynôme non nul π_a, appelé *polynôme minimal* de a.

6. Montrer que le polynôme minimal d'un nombre algébrique a est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Quel est le polynôme minimal de $1 + \sqrt{2}$?

7. Soit a un réel, et soit $\mathbb{Q}[a] = \{P(a) / P \in \mathbb{Q}[X]\}$. Montrer que $\mathbb{Q}[a]$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

8. Montrer le critère suivant :

a est algébrique si et seulement si $\mathbb{Q}[a]$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}$.

9. Montrer que si a est algébrique, $\mathbb{Q}[a]$ est un corps.

10. Soit $a \in \mathbb{R}$ un nombre algébrique et supposons que $\dim \mathbb{Q}[a] = 2$. Montrer qu'il existe alors un rationnel positif δ tel que $\mathbb{Q}[a] = \mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$.

Problème

On note $\mathbb{R}[X]$ la $\mathbb{R}$- algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour tout polynôme P, on note P' son polynôme dérivé. On rappelle que $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$.

Étant donné un entier naturel n, $[\![0, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et n.

Partie I.

Soit φ l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ll} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto P - P' \end{array}$$

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

1. Démontrer que φ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme. On note φ_n cet endomorphisme.

2. Expliciter la matrice de φ_n sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Démontrer que φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, \dots, s_n$ telle que :

(a) $\forall i \in [\![0, n]\!],\ \varphi_n(s_i) = \dfrac{X^i}{i!}$,

(b) $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier :

$$(id - \delta) \circ (id + \delta + \cdots + \delta^n) = id$$

6. En déduire l'expression de s_i en fonction de X, pour tout i dans $[\![0, n]\!]$.

Dans le reste du problème, on considère les deux familles de polynômes $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \cdots \frac{X^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{X^i}{i!}$$

$$T_n(X) = S_n(nx)$$

Dans les parties II, III et IV, on admettra le résultat suivant : Soit n un entier naturel ≥ 2. Toutes les racines complexes du polynôme S_n ont un module $< n$.

Partie II.

7. Donner le tableau de variations de S_3. Représenter sur un même graphique les courbes des fonctions S_1, S_3 ainsi que la fonction exponentielle ($x \mapsto e^x$) en s'attachant à respecter la position relative de ces trois courbes.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que le polynôme S_n n'a pas de racine réelle si n est pair et a une unique racine réelle simple si n est impair. (*Indication : On pourra faire une démonstration par récurrence.*)

Dans la suite du problème, on note α_n l'unique racine réelle de S_n, pour tout entier naturel **impair** n.

9. On se propose d'étudier le comportement de la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(a) Justifier que la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. (*Indication : On pourra étudier le signe de* $S_{2n+1}(\alpha_{2n-1})$.)

(b) Soit $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers un nombre réel ℓ.

i. Soit ε un nombre réel > 0. Justifier qu'il existe un entier naturel M tel que :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ m > M \Rightarrow |S_m(v_m) - e^{v_m}| < \varepsilon.$$

ii. En déduire que la suite $(S_m(v_m))_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers e^l.

(c) En déduire que la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Partie III.

Soit h la fonction de la variable réelle x définie par :

$$h(x) = xe^{1-x}.$$

10. Étudier la fonction h. Représenter son graphe sur $\mathbb{R}$.

11. Démontrer qu'il existe une fonction g de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $]-\infty, 1[$ dans $]-\infty, 1[$ telle que :

$$\forall x \in]-\infty, 1[,\ h(g(x)) = x.$$

Représenter le graphe de g. L'étude précise de g n'est pas demandée.

12. Démontrer qu'il existe un unique nombre réel ρ tel que $h(\rho) = -1$.

13. Démontrer que ρ est dans l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right[$.

Indication : on pourra utiliser le fait que $\ln 2 \geq \frac{13}{20}$.

14. Soit z un nombre complexe tel que : $|z| \leq 1$ et $|ze^{1-z}| \leq 1$. Soit n un entier naturel.

(a) Justifier l'égalité :

$$1 - e^{-nz}T_n(z) = (ze^{1-z})^n e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n}.$$

(b) En déduire que :

$$\left|1 - e^{-nz}T_n(z)\right| \leq 1 - e^{-n}T_n(1).$$

(c) En déduire que $T_n(z) \neq 0$.

15. Soit n un entier naturel impair ≥ 3. Démontrer que α_n est dans l'intervalle $]-n, n\rho[$.

Partie IV.

Pour tout entier naturel m, on pose $\gamma_{2m+1} = \dfrac{\alpha_{2m+1}}{(2m+1)}$.

16. Démontrer que pour tout nombre réel u et tout entier naturel n, on a :

$$e^{-u}S_n(u) = 1 + \frac{1}{n!}\int_u^0 t^n e^{-t}\mathrm{d}t.$$

17. Soit m une entier naturel. On note $n = 2m + 1$. Justifier l'égalité :

$$\int_{\gamma_n}^0 h(t)^n \mathrm{d}t = -\frac{n! e^n}{n^{n+1}}.$$

18. En déduire que la suite $\left(\displaystyle\int_{\gamma_{2m+1}}^{0} h(t)^{2m+1}\mathrm{d}t\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente et expliciter sa limite.

19. Démontrer que $\left(\displaystyle\int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1}\mathrm{d}t\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente et expliciter sa limite.

20. Déterminer un équivalent de α_{2m+1}.

Fin de l'énoncé