Devoir surveillé $n^{\circ}2$

le 30/10/2018

durée : 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice I

Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions contimument dérivables sur $[0,1]$. Pour $f, g \in E$, on pose

$$(f|g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur E. On notera $\|f\| = \sqrt{(f|f)}$ la norme associée.

2. Montrer que pour toute fonction g continue sur $[0,1]$, on a :

$$\int_0^1 |g(t)|\mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_0^1 (g(t))^2\mathrm{d}t}.$$

3. Soient a, b deux nombres réels montrer que

$$a + b \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

4. Déterminer une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leq C\|f\|$$

où $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

5. On pose $f_n(t) = \sin(n\pi t)$, calculer $\|f_n\|_\infty$ et $\|f_n\|$. En déduire que les normes $\|f_n\|_\infty$ et $\|f_n\|$ ne sont pas équivalentes.

Exercice II

Dans tout cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note :

$$\mathscr{P}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) / \forall p \in \mathbb{N}^*, \exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \text{ tel que } A = B^p\}$$

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que A est diagonalisable.

(b) Montrer que $A \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que $A \notin \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.

3. Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $N^n = 0$. Montrer que $N \notin \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$.

4. Dans cette question N est une matrice non nulle, telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$. On pose $A = I_n + N$.

(a) Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

(b) Soit V un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On suppose qu'au voisinage de 0, on a :

$$V(x) = o(x^q)$$

où $q \in \mathbb{N}$.
Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $V(X) = X^q Q(X)$.

(c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $U_q \in \mathbb{R}[X]$ tel qu'au voisinage de 0 on a :

$$1 + x = (U_q(x))^p + o(x^q).$$

(On pourra utiliser le développement limité de $(1+x)^\alpha$).

(d) En déduire que $I_n + N \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$.

Problème

n est un entier naturel, $n \geq 2$. $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$) représente alors, selon l'usage, les matrices carrées d'ordre n à coefficients réels (resp. complexes). Dans tout le problème on note J l'élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, défini par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

A. Éléments spectraux de J

1. Calculer χ_J le polynôme caractéristique de J. En déduire que la matrice J est diagonalisable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Dans quel cas est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

2. Vérifier que J est inversible et exprimer J^{-1} à l'aide de la matrice J.

3. On note $\mathbb{C}[J] = \{P(J)/P \in \mathbb{C}[X]\}$ le $\mathbb{C}$-algèbre engendré par J. Justifier que $\mathbb{C}[J]$ est de dimension finie et donner sa dimension. (*indication : on pourra montrer que* $(I, J, J^2, ..., J^{n-1})$ *est une base de* $\mathbb{C}[J]$)

4. Soit $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et M l'élément de $\mathbb{C}[J]$ définie par :

$$M = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k.$$

Déterminer les valeurs propres de la matrice M et montrer qu'elle est diagonalisable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
En déduire que

$$\det(M) = \prod_{k=0}^{n-1} p(w^k)$$

où $p(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et où $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Expliciter $\det[M(\lambda)]$ lorsque $M(\lambda) = \lambda I_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} J^k$ où λ est un nombre complexe quelconque.

5. Les notations étant celles du **4.**, on note $\widehat{M}$ l'élément de $\mathbb{C}[J]$ défini par $\widehat{M} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(w^k) J^k$ et u l'application de $\mathbb{C}[J]$ dans lui même définie par :

$$u(M) = \widehat{M}.$$

Montrer que l'application u est un automorphisme de $\mathbb{C}[J]$ et exprimer sa matrice U dans la base $\mathscr{B} = (I, J, J^2, ..., J^{n-1})$.
Que dire alors de u^2 ? Exprimer U^{-1} où U^{-1} l'inverse de U.
Soit $z \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u. Montrer que $z \in \{-i\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -\sqrt{n}, \sqrt{n}\}$.

B. Étude de deux éléments de $\mathbb{C}[J]$

6. Dans cette question M_1 est l'élément de $\mathbb{C}[J]$ est défini par :

$$M_1 = I_n + 2J + 3J^2 + ... + nJ^{n-1}.$$

Expliciter avec soin les éléments du spectre de M_1 puis la matrice $\widehat{M_1}$.
Que veut $\det(M_1)$? Exprimer M_1^{-1} inverse de M_1.

7. Ici, M_2 est l'élément de $\mathbb{C}[X]$ défini par :

$$M_2 = I_n + 3J + 5J^2 + ... + (2n-1)J^{n-1}.$$

Justifier l'égalité : $(I_n - J)^2 M_2 = 2n(J - I_n)$ et montrer que M_2 est inversible, d'inverse $M_2^{-1} \in \mathbb{C}[J]$, que l'on demande d'expliciter. Que vaut $\det(M_2)$?

C. Étude de la suite $(M_k)_{k\geq 1}$ où M est une matrice circulaire à coefficients strictement positifs

Soient $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ n réels strictement positifs et $M = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$. On désigne par p le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$.

8. On suppose : $a_0 + a_1 + ... + a_{n-1} = 1$.
Montrer qu'alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant : $z \neq 1$, $|z| = 1$, on a $|p(z)| < 1$.

9. Justifier avec soin la convergence dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de la suite $(M^k)_{k\geq 1}$ et expliciter la limite, notée L, de cette suite.

10. Que peut-on déduire, à partir de l'étude précédente, concernant le comportement de la suite $(M^k)_{k\geq 1}$ dans le cas où $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ sont n réels strictement positifs arbitraires ?

Fin de l'énoncé