Devoir surveillé $n^\circ 3$

le 30/11/2018

durée : 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice I

$E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie par :

$$\forall f \in E,\ \ \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

Soit K l'opérateur de E dans E défini par :

$$\forall f \in E,\ \ [K(f)](x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que K est une application linéaire et continue de E dans E.

2. On pose $K^n = K \circ ... \circ K$ composé n fois de K avec lui-même. Montrer par récurrence que K^n est l'application de E dans E qui à f associe la fonction :

$$[K^n(f)](x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\mathrm{d}t$$

3. Montrer que$\|K^n\| = \dfrac{1}{n!}$.

4. Montrer qu'il existe une application linéaire continue de E dans lui-même notée B telle que $B(I-K) = (I-K)B = I$. (*on pourra montrer que, pour tout $g \in E$, l'équation fonctionnelle $f - K(f) = g$ admet une solution unique, on remarquera aussi que $f = [K(f)]'$*).

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Sp}(K^n) = \emptyset$.

Exercice II

Soit $E = l^{\infty}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme définie par :

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E, \;\; \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|$$

1. Soit $T : E \to E$ l'application définie par :

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E, \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \;\; [T(x)](n) = x(n+1)$$

Montrer que T est une application linéaire continue sur E et calculer sa norme $\|\|T\|\|$.

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\sum_{n=0}^{\infty} |a(n)| < \infty$. Montrer que l'application $U : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E, \;\; U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x(n)$$

est une application linéaire continue et calculer sa norme $\|\|U\|\|$.

Problème : Étude de deux normes sur $\mathbb{R}[X]$

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P \in E$, on écrira $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ sa décomposition sur la base $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$, étant entendu que la famille $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est alors implicitement une famille presque nulle, c'est-à-dire qu'elle n'a qu'un nombre fini de termes non nuls. On pose alors

$$\|P\|_c = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$$

On définit également

$$\|P\|_\infty = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|.$$

A. Comparaison de ces deux normes et études de continuité

1. Montrer que $\|.\|_c$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes sur E.

2. On compare ici ces deux normes.

(a) Montrer qu'il n'existe aucune constante $M > 0$ telle que pour tout $P \in E$, on ait

$$\|P\|_c \leq M\|P\|_\infty$$

On pourra considérer le polynôme $P_n = (1 - X^2)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer de même qu'il n'existe aucune constante $M > 0$ telle que pour tout $P \in E$, on ait $\|P\|_\infty \leq M\|P\|_c$.

3. Soit $\varphi : P \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que $\varphi : (E, \|.\|_\infty) \to \mathbb{R}$ est une application linéaire continue.

(b) Montrer que $\varphi : (E, \|.\|_c) \to \mathbb{R}$ n'est pas continue.

4. Soit $\psi : P(X) \mapsto P\left(\dfrac{X}{2}\right)$.

(a) Étudier la continuité de $\psi : (E, \|.\|_c) \to (E, \|.\|_c)$.
(b) Montrer que ψ est une bijection de E sur E.
(c) Étudier la continuité de $\psi^{-1} : (E, \|.\|_c) \to (E, \|.\|_c)$.

B. Restriction à la dimension finie

Dans toute la suite, on fixe $d \in \mathbb{N}$ et on pose $E_d = \mathbb{R}_d[X]$. On considère les restrictions respectives de $\|.\|_c$ et $\|.\|_\infty$ à E_d, que l'on note de la même façon.

1. (a) Justifier que $\|.\|_c$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes sur E_d, et qu'elles sont équivalentes.
(b) Donner la plus petite constante $M > 0$ telle que pour tout $P \in E_d$

$$\|P\|_\infty \leq M\|P\|_c.$$

2. Le but de cette question est d'obtenir une constante pour l'inégalité dans l'autre sens. On définit la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ par

$$T_0 = 1, T_1 = X,$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\deg(T_n) = n,$$

et pour tout $\theta \in [0, \pi]$

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

(b) En déduire que $\|T_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que pour tout $P \in E_d$, il existe un unique $(a_0, ..., a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k T_k$$

(c) Calculer $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^\pi \cos(p\theta)\cos(q\theta)\mathrm{d}\theta$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. En déduire, avec les notations de la question précédente, que

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi P(\cos(\theta))\cos(p\theta)\mathrm{d}\theta$$

si $k \in [\![1, d]\!]$ et donner une expression similaire pour a_0.

(d) Montrer que

$$|a_k| \leq \sqrt{2}\|P\|_\infty$$

pour tout $k \in [\![0, d]\!]$.

(e) Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|T_k\|_c \leq (1 + \sqrt{2})^k$.

(f) Montrer que pour tout $P \in E_d$

$$\|P\|_c \leq M_d\|P\|_8$$

où $M_d = (1 + \sqrt{2})^{d+1} - 1$.

Fin de l'énoncé