Devoir surveillé $n^\circ 4$

le 15/01/2019

durée : 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice

Soit n un entier naturel non nul.

1. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, non vides, non réduits à un point. On considère une suite (f_n) d'applications de I dans J, une application f de I dans J et une application g de J dans $\mathbb{R}$.
On suppose que g est uniformément continue sur J et que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers f.
Montrer que la suite $(g \circ f_n)$ converge uniformément sur I vers $g \circ f$.

2. Soit φ une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Déterminer le réel L tel que : $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$.

(b) Soit A un réel strictement positif.

i. Justifier l'existence d'un entier naturel non nul N tel que, pour tout n, $n \geq N$, pour tout k élément de $\{0, 1, 2, ..., n\}$ et tout x de $[-A, A]$, on ait :

$$\left|\frac{x}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{2}$$

ii. Établir que pour tout t élément de $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$:

$$0 \leq t - \ln(1+t) \leq t^2$$

iii. Pour $n \geq N$, on considère les applications u_n et v_n de $[-A, A]$ dans $\mathbb{R}$, définies par :

$$x \mapsto u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \mapsto v_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left[1 + \frac{x}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right].$$

Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ converge uniformément sur $[-A, A]$ vers la fonction nulle.

iv. En déduire que la suite (v_n) converge uniformément sur $[-A, A]$ vers une application notée v. Pour tout x de $[-A, A]$, exprimer $v(x)$ en fonction de L.

3. On pose :

$$I_n = \int_0^1 \prod_{k=1}^{n} \left[1 + \frac{x}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right] \mathrm{d}x$$

Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Problème

On note C l'ensemble des fonctions à valeurs réelles continues sur $[0, 1]$. Pour toute fonctions $f \in C$, on pose :

$$I_n(f) = \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t.$$

L'objet du problème est d'étudier la suite $(I_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ et certains séries qui lui sont associées, la partie V spécialisant l'étude au sous-espace vectoriel $\mathscr{P}_{\mathbb{N}}$ de C formée des fonctions polynômes de degré au plus N ($N \in \mathbb{N}$ fixé).

I - Étude de la suite $(I_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$

1. Montrer que cette suite converge vers 0.

2. On veut établir que $\lim\limits_{n \to \infty} nI_n(f) = f(1)$.

(a) Soit $\alpha \in]0, 1[$, montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} n \int_0^\alpha t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$.

(b) On suppose de plus que $f(1) = 0$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| n \int_\alpha^1 t^n f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En déduire que $\lim\limits_{n \to \infty} nI_n(f) = 0$.

(c) Conclure dans le cas général (c'est-à-dire lorsque l'on ne fait plus l'hypothèse $f(1) = 0$).

3. Application : on prend $f(t) = e^{-t}$.

(a) Calculer $I_n(f)$.

(b) Déduire de l'étude précédente un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

II - Étude de la série de terme général $[I_n(f)]^2$

1. Montrer, en utilisant $I-2)$, que cette série converge.

   On se propose dans la suite de cette partie de trouver un majorant de $\sum_{n=0}^{\infty}[I_n(f)]^2$.

2. P étant un polynôme à coefficients réels, vérifier l'égalité :

$$\int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x + i\int_{0}^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}\mathrm{d}\theta = 0.$$

3. Établir alors les inégalités :

$$\int_{0}^{1}[P(x)]^2\mathrm{d}x \le \int_{-1}^{1}[P(x)]^2\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|P(e^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta.$$

   (on pourra remarquer que $|P(e^{i\theta})|^2| = P(e^{i\theta})P(e^{-i\theta})$)

4. En déduire que pour toute famille $(a_0, a_1, ..., a_n)$ de $(n+1)$ réels

$$0 \le \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\frac{a_k a_l}{k+l+1} \le \pi\sum_{k=0}^{n}a_k^2$$

5. A l'aide de la question précédente et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux fonctions $f(t)$ et $g(t) = \sum_{k=0}^{n} I_k(f)t^k$, montrer que pour toute $f \in C$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[I_n(f)]^2 \le \pi\int_{0}^{\pi}[f(t)^2]\mathrm{d}t.$$

III - Étude de la série de terme général $(-1)^n I_n(f)$

1. On suppose, dans cette seule question, que pour tout $t \in [0,1]$, on a $f(t) \ge 0$. Montrer que la série converge.
2. f étant à nouveau un élément quelconque de C, montrer, en utilisant l'identité

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k + (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t},$$

   que la série converge et que :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_n(f) = \int_{0}^{1}\frac{f(t)}{1+t}\mathrm{d}t$$

3. Première application : On suppose que $f(t) = 1$.

   Déduire de l'étude précédente une expression simple de $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

4. Deuxième application : On suppose que $f(t) = \sqrt{t}$.

   Déduire de l'étude prdcddente une expression simple de $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

IV - Étude de la série de terme général $I_n(f)$

1. Soit g une fonction à valeurs réelles, continue sur $[0,1[$ et telle que l'intégrale $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$ soit absolument convergente.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 t^n g(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente. On pose alors $I_n(g) = \int_0^1 t^n g(t)\mathrm{d}t$.

(b) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\int_\alpha^1 t^n g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(c) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(g) = 0$.

2. Soit $f \in C$ telle que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t$ soit absolument convergente. Montrer qu'alors la série de terme général $I_n(f)$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t.$$

3. Soit $f \in C$ telle que pour tout $t \in [0,1]$, on ait $f(t) \geq 0$. Montrer qu'alors, si la série de terme général $I_n(f)$ converge, il en est de même de l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t$, l'égalité de la question précédente étant de nouveau vérifiée.

FIN DE L'ÉPREUVE