Devoir surveillé $n^\circ 5$

le 12/02/2019

durée : 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Problème I

On considère un combat entre deux tireurs A et B qui se déroule en une suite d'épreuves où A et B tirent simultanément l'un sur l'autre de la façon suivante, jusqu'à élimination d'au moins un des deux tireurs :

- ◇ Lorsque A tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $\dfrac{2}{3}$.
- ◇ Lorsque B tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $\dfrac{1}{3}$.
- ◇ Lorsqu'un tireur est atteint, il est définitivement éliminé des épreuves suivantes.
- ◇ Les résultats des différents tirs sont supposés indépendants les uns des autres.

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère les événements suivants :

- AB_n : « à l'issue de la n-ième épreuve, A et B ne sont pas encore éliminés »,
- A_n : « à l'issue de la n-ième épreuve, seul A n'est pas encore éliminé »,
- B_n : « à l'issue de la n-ième épreuve, seul B n'est pas encore éliminé »,
- $\varnothing_n$: « à l'issue de la n-ième épreuve, les deux tireurs sont éliminés ».

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la matrice-ligne à 4 colonnes dont les éléments successifs sont les probabilités des 4 événements $AB_n, A_n, B_n, \varnothing_n$:

$$X_n = (p(AB_n), p(A_n), p(B_n), p(\varnothing_n))\,.$$

Pour $n = 0$, comme A et B sont présents au début du combat, on convient donc de poser :

$$X_0 = (p(AB_0), p(A_0), p(B_0), p(\varnothing_0)) = (1, 0, 0, 0).$$

1. (a) Vérifier que $p\left(AB_{n+1}|AB_n\right) = \dfrac{2}{9}$.

(b) Déterminer (en le justifiant) $p\left(A_{n+1}|AB_n\right)$, $p\left(B_{n+1}|AB_n\right)$ et $p\left(\varnothing_{n+1}|AB_n\right)$.

(c) En appliquant la formule des probabilités totales à un système complet d'événements correctement choisi, expliciter une matrice carrée M d'ordre 4 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = X_n M.$$

Vérifier que $X_n = X_0 M^n$.

2. (a) Établir que la matrice M est diagonalisable et préciser les sous-espaces propres de M.

(b) On considère trois réels x, y, z et la matrice P définie par :

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Déterminer x, y, z pour que les vecteurs-colonnes de P soient des vecteurs propres de M.

(c) Vérifier que P est inversible, préciser la matrice $D = P^{-1}MP$ et expliciter P^{-1}.

3. (a) Exprimer M^n en fonction de D^n, et expliciter $\lim\limits_{n\to\infty} M^n$.

(b) En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$, puis préciser les probabilités pour que A ou B remportent le combat.

4. Soit T la variable aléatoire indiquant le nombre d'épreuves réalisées avant la fin du combat.

(a) Calculer la probabilité $p(T = 1)$.

(b) Pour tout entier naturel n, comparer les événements $AB_1 \cap AB_2 \cap ... \cap AB_n$ et $T > n$. En déduire la probabilité $p(T > n)$, puis vérifier que $p(T = n) = \dfrac{7}{9}\left(\dfrac{2}{9}\right)^{n-1}$.

(c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p(T = n)$ et l'espérance de la variable aléatoire T.

Problème II

Dans tout ce problème, a est un réel tel que $0 < a < 1$.

Partie I : Calcul d'une somme et d'une intégrale.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, \pi]$, on note :

$$C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx).$$

(a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, \pi]$:

$$1 + 2C_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

(b) Établir, pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 1$ et 0 :

$$\sum_{k=-n}^{n} z^k = z^{-n}\frac{1-z^{2n+1}}{1-z}.$$

(c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0, \pi]$:

$$\frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\mathrm{d}x$ existe et calculer sa valeur.

On note $\varphi : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } x = 0 \\ \dfrac{\cos(ax)-1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \textbf{si } x \in]0, \pi] \end{cases}$$

3. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$ et calculer $\varphi'(0)$.

4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_0^{\pi} \varphi(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\mathrm{d}x.$$

Montrer, grâce à une intégration par parties, que I_n tend vers 0 quand l'entier n tend vers l'infini.

Partie II : Calcul de la somme d'une série

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \int_0^{\pi} \cos(ax)\cos(nx)\mathrm{d}x.$$

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{1}{2}I_n + J_n.$$

2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge, et calculer sa somme (on pourra utiliser les résultats de $I.2$ et $I.4$)

3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un en fonction de a et de n.

4. établir :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}a}{n^2-a^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} - \frac{1}{a}.$$

Partie III : Calcul d'une intégrale

Dans cette partie, α désigne un réel tel que $\alpha > 1$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$. On note :

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}, \quad G(\alpha) = \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}, \quad H(\alpha) = \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$$

2. (a) Montrer, pour tout réel t de $[0, 1]$ et tout n de $\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1} \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}.$$

(b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque l'entier n tend vers l'infini.

(c) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k\alpha+1}$ converge et que :

$$G(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha+1}$$

3. (a) En utilisant le changement de variable défini par $u = t^{1-\alpha}$, montrer

$$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} G\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$$

et en déduire :

$$H(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha-1}.$$

(b) Établir

$$F(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2-1}.$$

4. En utilisant le résultat de $II.4$, établir finalement :

$$F(\alpha) = \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}.$$

Partie IV : Applications

On rappelle l'inégalité de Hölder : pour tous p et q des nombres réels tels que $p, q > 1$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et pour tous vecteurs x et y de $\mathbb{C}^n$, on a l'inégalité :

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k\, y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}.$$

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul m, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{m}}{(m+n)\sqrt{n}} \leq \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}}$.

(b) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs, de carré sommable (c'est-à-dire les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n^2$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n^2$ sont convergentes). Montrer que la famille $\displaystyle\left(\frac{a_i b_j}{i+j}\right)_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et montrer l'inégalité

$$\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{a_i b_j}{i+j} \leq \pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarquer que $\displaystyle\frac{a_i b_j}{i+j} = \left(\frac{i^{\frac{1}{4}}}{j^{\frac{1}{4}}\sqrt{i+j}} a_i\right)\left(\frac{j^{\frac{1}{4}}}{i^{\frac{1}{4}}\sqrt{i+j}} b_j\right)$.

2. (a) Soit p un nombre réel tel que $p > 1$. Montrer que, pour tout entier naturel non nul m, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^{\frac{1}{p}}}{n^{\frac{1}{p}}(m+n)} \leq \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{1}{p}}(1+t)}.$$

(b) En utilisant la relation de Chasles $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{1}{p}}(1+t)} = \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{1}{p}}(1+t)} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{1}{p}}(1+t)}$, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{1}{p}}(1+t)} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}.$$

(c) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs telles que les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n^p$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n^q$ convergent. Montrer que la famille $\displaystyle\left(\frac{a_i b_j}{i+j}\right)_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et montrer l'inégalité

$$\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{a_i b_j}{i+j} \leq \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Fin de l'épreuve