Devoir surveillé $n^{\circ}6$

le 19/03/2019

durée : 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice

Dans cette partie, on désigne par V l'ensemble ouvert défini par :

$$V = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2} \right\}$$

1. Vérifier que V est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2. Soit u la fonction de V dans $\mathbb{R}$: $\quad (x,y) \mapsto u(x,y) = xy^2 + x^2 + y^2 + \dfrac{1}{4}$.

(a) Montrer que la fonction u admet un minimum sur V dont on précisera la valeur, mais n'admet pas de maximum.

(b) Montrer que la fonction u est majorée par $\dfrac{7}{8}$ sur l'ouvert V.

3. Soit F la fonction : $\quad (x,y) \longmapsto F(x,y) = \dfrac{\ln\left(\dfrac{3}{4} - xy^2 - x^2 - y^2\right)}{\dfrac{1}{4} + xy^2 + x^2 + y^2}$.

(a) Montrer que la fonction F est définie sur l'ouvert V et qu'elle y admet un maximum. Préciser la valeur de ce maximum.

(b) Donner un encadrement de $F(x,y)$ pour tout (x,y) de V.

Problème

Pour tout couple (p,q) d'entiers strictement positifs, on note $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels. Si A est un élément quelconque de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ on note ${}^tA$ la transposée de A.

Dans tout le problème, pour n dans $\mathbb{N}^*$, on identifie $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ es matrices colonnes à n lignes et à coefficients réels. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire de deux vecteurs X et Y étant noté $(X|Y)$ ou ${}^tYX$.

Pour tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$, sa norme est donnée par $\|X\| = \sqrt{{}^tXX} = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Le module et le conjugué d'un nombre complexe z sont notés respectivement $|z|$ et $\overline{z}$. On rappelle que $|z|^2 = z\overline{z}$. Le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$ est noté i.

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la matrice $H_n = \left(h_{k,j}^{(n)}\right)_{1\leq k,j\leq n}$ (appelée matrice de Hilbert) de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, de terme générique $h_{k,j}^{(n)} = \dfrac{1}{k+j-1}$ les entiers k et j décrivant $[\![1,n]\!]$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la matrice H_n, s'écrit donc

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

Préliminaire

On rappelle que la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ admet une fonction réciproque notée arctan. On note $(\arctan)'$ sa dérivée.

1. (a) Pour tout réel x, rappeler l'expression de $(\arctan)'(x)$ en fonction de x.

(b) Montrer, pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, l'égalité :

$$\arctan(x) + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

(c) Établir, pour tout x de $\mathbb{R}^+$ l'encadrement :

$$0 \leq \arctan(x) \leq x.$$

2. (a) Montrer que la fonction ψ définies sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit U une variable aléatoire réelle de densité ψ. On note F sa fonction de répartition. Déterminer la loi de la variable aléatoire $F(U)$.

Partie I. Dimension du sous-espace propre associé à la plus grande valeur propre de H_n

1. Calculer pour tout couple (k,j) de $[\![1,n]\!]^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{k+j-2}\mathrm{d}t$.

En déduire, pour vecteur $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$, l'égalité :

$$ {}^tXH_nX = \int_0^1 (x_0 + x_1 t + ... + x_{n-1}t^{n-1})^2 \mathrm{d}t. $$

2. (a) Justifier l'existence d'une matrice diagonale D à coefficients diagonaux strictement positifs, et d'une matrice orthogonal P telles que :

$$ H_n = PD{}^tP. $$

(b) On désigne par α_n (resp. β_n) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de H_n. Montrer, pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$, l'encadrement suivant :

$$ \alpha_n \|X\|^2 \leq {}^tXH_nX \leq \beta_n \|X\|^2. $$

3. On note $\mathscr{V}$ le sous-espace propre de H_n associé à la valeur propre β_n.

(a) Soit Y un vecteur de $\mathscr{V}$. Montrer que :

$$ {}^tYH_nY = \beta_n \|Y\|^2. $$

(b) Réciproquement, soit Y un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ vérifiant ${}^tYH_nY = \beta_n\|Y\|^2$. Montrer que Y appartient à $\mathscr{V}$.

4. Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathscr{V}$. On note $|X_0| = \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \\ \vdots \\ |x_{n-1}| \end{pmatrix}$ le vecteur dont les composantes sont les valeurs absolues des composantes de X_0.

(a) Établir l'inégalité

$$ {}^t|X_0|H_n|X_0| \geq {}^tX_0H_nX_0. $$

(b) En déduire que $|X_0|$ est un élément de $\mathscr{V}$.

(c) Montrer que les composantes du vecteur $H_n|X_0|$ sont toutes strictement positives. En déduire que le vecteur X_0 n'a aucune composante nulle.

(d) En utilisant Ie fait que ${}^tX_0H_nX_0 = {}^t|X_0|H_n|X_0|$, montrer que les composantes de X_0 sont toutes de même signe.

5. (a) Montrer qu'il n'existe pas deux vecteurs non nuls de $\mathscr{V}$ orthogonaux.

(b) En déduire la dimension du sous-espace propre $\mathscr{V}$.

Partie II. Croissance et convergence de la suite $(\beta)_{n\geq 1}$

On rappelle β_n désigne la plus grande valeur propre de la matrice H_n.

1. Soit $X' = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de H_n associé à β_n. Soit Z le vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par $Z = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que ${}^tZH_{n+1}Z = {}^tX'H_nX'$. En déduire que la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

2. Soit φ_1 et φ_2 deux fonctions définies et continues sur le segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. On définit le nombre complexe $\displaystyle\int_a^b (\varphi_1(t) + i\varphi_2(t))\mathrm{d}t$ par :

$$\int_a^b (\varphi_1(t) + i\varphi_2(t))\mathrm{d}t = \int_a^b \varphi_1(t)\mathrm{d}t + i\int_a^b \varphi_2(t)\mathrm{d}t.$$

et on rappelle que pour tout réel x, on a : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

(a) Calculer, pour tout k de $\mathbb{Z}$, les deux nombres complexes $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{ikt}\mathrm{d}t$.

(b) Montrer, pour tout entier p de $\mathbb{N}$, l'égalité :

$$\int_{-1}^{1} x^p \mathrm{d}x = -i\int_0^{\pi} e^{i(p+1)t}\mathrm{d}t.$$

(c) En déduire, pour tout polynôme P à coefficients complexes, l'égalité :

$$\int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x = -i\int_0^{\pi} P\left(e^{it}\right) e^{it}\mathrm{d}t.$$

(d) Dans le cas où P est un polynôme à coefficients réels, établir l'inégalité suivante :

$$\left|\int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^{\pi} |P\left(e^{it}\right)|\mathrm{d}t.$$

Dans les questions 3 et 4, on désigne par $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ *un vecteur quelconque de* $\mathbb{R}^n$.

3. (a) Établir l'encadrement :

$$0 \leq {}^tXH_nX \leq \int_{-1}^{1} (x_0 + x_1u + ... + x_{n-1}u^{n-1})^2\mathrm{d}u.$$

(b) En déduire que l'on a :

$$0 \leq {}^tXH_nX \leq \int_0^{\pi} |x_0 + x_1e^{it} + ... + x_{n-1}e^{i(n-1)t}|^2 \mathrm{d}t.$$

4. (a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \left| \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{ikt} \right|^2 .$$

Montrer que φ est 2π-périodique et paire, en déduire l'égalité :

$$\int_0^{\pi} \varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

(b) Établir l'inégalité :

$${}^tXH_nX \leq \pi\|X\|^2.$$

(c) En déduire que la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$ est majorée, puis qu'elle est convergente.

Partie III. Limite de la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$

Dans cette partie, le vecteur W de $\mathbb{R}^n$ est défini par $W = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}$.

1. Montrer les égalités suivantes :

$${}^tWH_nW = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{j}(k+j-1)} = \int_0^1 \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{t^{l-1}}{\sqrt{l}} \right)^2 \mathrm{d}t.$$

2. En déduire, pour $n \geq 2$, l'inégalité suivante :

$${}^tWH_nW \geq \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{p-k}}.$$

(on pourra utiliser le développement du produit de deux polynômes)

Dans les questions suivantes, p est un entier supérieur ou égal à 2.

3. (a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0, p[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x(p-x)}}.$$

(b) En déduire, quelle que soit la parité de p, l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{k(p-k)}} \geq \int_1^{p-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(p-x)}}.$$

4. Justifier la validité du changement de variable $x = \dfrac{p}{1+t^2}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_1^{p-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(p-x)}}$, et établir la relation :

$$\int_1^{p-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(p-x)}} = \pi - 4\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{p-1}}\right).$$

5. On pose : $u_p = \dfrac{1}{p-1}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{p-1}}\right)$. Montrer que la série de terme général u_p est convergente.

6. (a) Montrer que $\|W\|^2$ est équivalent à $\ln(n)$, lorsque $n$tend vers $+\infty$.
(b) En déduire la limite de la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$.

Fin de l'épreuve