Devoir surveillé $n^{\circ}1$

le 24/09/2019

durée : 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice I

Le but de cet exercice est de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.
Soit A une partie de $\mathbb{Z}$, on définit la fonction caractérisatique de A comme étant l'application :

$$\chi_A : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{s } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

On dit qu'une partie A de $\mathbb{Z}$ est périodique lorsque χ_A, sa fonction caractéristique est périodique. Soit A une partie périodique de $\mathbb{Z}$, on appelle période de A le plus petit entier strictement positif a tel que χ_A soit a-périodique.

1. Soit A et B deux parties de $\mathbb{Z}$, calculer

$$\chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B} - \chi_A - \chi_B.$$

2. Montrer que $n\mathbb{Z}$ est périodique, préciser sa période.

3. Soient A et B deux parties périodiques de $\mathbb{Z}$ de période a et b respectivement. Montrer que $C = A \cup B$ est périodique.

4. Préciser la période de $4\mathbb{Z} \cup 6\mathbb{Z}$.

5. Soit A une partie périodique de $\mathbb{Z}$, montrer que le complémentaire de A dans $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $\mathbb{Z} \setminus A$, est périodique.

6. On suppose que l'ensemble des nombres premiers est fini, soit $\mathscr{P} = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ cet ensemble. On pose $S = \bigcup_{i=1}^{n} p_i\mathbb{Z}$, montrer que S est une partie périodique de $\mathbb{Z}$.
7. Montrer que $\mathbb{Z} \setminus S = \{-1, 1\}$.
8. Conclure.

Exercice II

$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels. On note $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} / a, b \in \mathbb{Q}\}$.
1. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : \mathbb{Q}[\sqrt{3}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ un automorphisme de corps.
  (a) Montrer que $f(r) = r$, pour tout $r \in \mathbb{Q}$.
  (b) Déterminer les valeurs possibles de $f\left(\sqrt{3}\right)$.
  (c) Déterminer tous les automorphismes de corps de $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$.
3. Déterminer tous les isomorphismes de corps de $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ dans $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$. (on rappelle que $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} / a, b \in \mathbb{Q}\}$)

Problème

Soit $(G, *)$ un groupe, d'élément neutre e. Soit E un ensemble non vide. On peut définir une *action* de G sur E par une application

$$\begin{array}{ccc} G \times E & \to & E \\ (g, x) & \mapsto & g.x \end{array}$$

satisfaisant aux deux conditions suivantes :

$$\forall x \in E, \qquad e.x = x \tag{1}$$
$$\forall (g, h) \in G^2, \ \forall x \in E, \qquad (g * h).x = g.(h.x) \tag{2}$$

Dans ce cas on dit également que G *opère* (ou *agit*) sur l'ensemble E.
Soit $x \in E$, on appelle *stabilisateur* de x (sous l'action de G) l'ensemble que l'on notera

$$\text{Stab}_G(x) = \{g \in G / g.x = x\}.$$

On dit que l'action est *transitive* si

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \exists g \in G \ \text{ tel } \ y = g.x.$$

On définit la relation $\mathscr{R}$ sur E par :

$$x\mathscr{R}y \ \text{ s'il existe } \ g \in G \ \text{ tel que } \ y = g.x.$$

On appelle *orbite* de x sous l'action de G l'ensemble noté

$$\text{Orb}_G(x) = \{y \in E / x\mathscr{R}y\}.$$

Généralités

Soit G un groupe opérant sur E.

1. Soit $x \in E$, montrer que $\text{Stab}_G(x)$ est un sous-groupe de G.

2. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E.

3. Lorsque l'action est transitive, que peut-on dire de l'orbite d'un élément x de E ?

4. Montrer que pour tout $g \in G$, l'application $\gamma_g : x \mapsto g.x$ est une bijection de E sur lui même. On note S_E le groupe des bijections de E sur lui-même.

5. Montrer que l'application Γ définie par :

$$\Gamma : \begin{array}{ll} G & \longrightarrow S_E \\ g & \longmapsto \Gamma(g) = \gamma_g \end{array}$$

est un morphisme de groupe G sur S_E.

6. Montrer que $\bigcap\limits_{x\in E} \text{Stab}_G(x) = \ker(\Gamma)$.

On dit que l'action de G sur E est *fidèle* si le morphisme Γ est injectif.

Exemples

1. Soit $(G,*)$ un groupe, montrer que l'on définit une action de G sur lui-même en posant

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (g,h) & \mapsto & g*h \end{array}$$

et que cette action est transitive et fidèle.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe linéaire sur $\mathbb{R}$ d'ordre n, et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille n.

Montrer que $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ opère sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en posant

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ (P,M) & \mapsto & PM{}^tP \end{array}$$

où ${}^tP$ désigne la transposée de la matrice P. Expliquer que cette action n'est pas fidèle.

3. On note l'ensemble $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z) > 0\}$, et $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R}) / \det(A) = 1\}$.

(a) Montrer que $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que l'on définit une action de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ sur H en posant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} & \to & \mathbb{H} \\ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) & \mapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

(c) Soit $z \in \mathbb{H}$, montrer que $i\text{Im}(z) \in \text{Orb}_{\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})}(z)$. (on pourra remarquer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont dans $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$.)

(d) Montrer que pour tout $y \in]0, +\infty]$ on a $iy \in \text{Orb}_{\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})}(i)$.

(e) Déduire que cette action est transitive, mais qu'elle n'est pas fidèle.

(f) Déterminer $\text{Stab}_{\text{SL}_2(\mathbb{R})}(i)$.

Fin de l'énoncé