Devoir surveillé $n°2$

le 29/10/2019

durée : 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice

1. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3). Soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice associée T relativement à cette base s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer les valeurs propres de t. Déterminer les sous-espaces propres de t associés, et donner une base de chacun d'entre eux.
L'endomorphisme t est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?
L'objet des questions suivantes est une généralisation des résultats précédents.

2. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, ..., e_{2n+1})$.
Soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ défini par :

$$\begin{cases} t(e_i) = e_1 & \text{pour tout entier } \; i \in [\![1, 2n+1]\!] \setminus \{n+1\}, \\ t(e_{n+1}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{2n+1} e_i. & \end{cases}$$

(a) Déterminer la matrice T associée à l'endomorphisme t relativement à la base $(e_1, e_2, ..., e_{2n+1})$

(b) Déterminer le rang de t, ainsi que la dimension du noyau de t.

(c) Justifier que 0 est valeur propre de t. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0, ainsi qu'une base de ce sous-espace.

3. Montrer que $\text{Im}(t \circ t) \subset \text{Im}(t)$.

4. Soit $\tilde{t}$ l'endomorphisme défini sur $\text{Im}(t)$ par : pour tout x de $\text{Im}(t)$, $\tilde{t}(x) = t(x)$.

Établir que $\mathscr{B} = \left(e_1, \sum_{i=1}^{2n+1} e_i\right)$ constitue une base de $\text{Im}(t)$.

Écrire la matrice associée à $\tilde{t}$ relativement à la base $\mathscr{B}$.

5. (a) Soit λ une valeur propre non nulle de t, et x un vecteur propre associé à λ. Montrer que x appartient à $\text{Im}(t)$.

(b) En déduire toutes les valeurs propres de t. L'endomorphisme t est-il diagonalisable ?

Problème

Notations et définitions

Dans tout le problème E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Un endomorphisme u de E est dit semi-simple si tout sous-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire stable.
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on désigne par π_A et χ_A respectivement le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de A.

Partie I : Exemple

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les éléments propres de A (réels), A est-elle diagonalisable (dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$) ? est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$?

2. Déterminer π_A.
(*Il n'est pas conseillé de faire trop de calcul*)

3. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ stable par u, on pose $v = u|_F$, l'endomorphisme induit par u sur F.

(a) Quelles sont les valeurs possibles de χ_v. (Par convention si $F = \{0\}$, $\chi_v = 1$)

(b) Montrer que si F contient un vecteur non nul de $\ker(u^2 + Id_E)$, alors F contient tout le sous-espace $\ker(u^2 + Id_E)$.

(c) En discutant sur χ_v et son degré, montrer que F est de l'un des cas suivants :

i. $F = \{0\}$.
ii. Une droite incluse dans $\ker(u - Id_E)$.
iii. $F = \ker(u - Id_E)$.
iv. $F = \ker(u^2 + Id_E)$.
v. $F = \ker(u^2 + Id_E) \oplus D$, où D est une droite incluse dans $\ker(u - Id_E)$.
vi. $F = \mathbb{R}^4$.

Dans le troisième et quatrième cas, expliciter une base de F.

(d) Montrer que dans tous les cas F admet un supplémentaire stable.

4. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ telle que :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie II

A : Cas où χ_u est scindé

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose dans cette partie (A) que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (ou χ_u scindé). On pose

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}.$$

1. On suppose que u est diagonalisable, soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F est stable par u si et seulement si F s'écrit

$$F = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$$

avec F_i un sous-espace vectoriel de $E_{\lambda_i}(u)$.

2. On suppose que u est semi-simple, montrer que u est diagonalisable.

3. En déduire que u est semi-simple si et seulement si u est diagonalisable. Donner l'expression du polynôme minimal dans ce cas.

B : Cas où u est irréductible

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Pour tout $x \in E$, on pose :

$$I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] / P(u)(x) = 0\}, \quad Z[x] = \text{Vect}\left\{u^k(x) / k \in \mathbb{N}\right\}.$$

(a) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire π_x tel que :

$$I_x = \{Q\pi_x / Q \in \mathbb{K}[X]\}.$$

(b) Montrer que $\deg \pi_x = \dim Z[x]$.

Dans la suite de cette partie (B), on suppose que π_u est irréductible.

Soit F un sous-espace strict de E stable par u.

2. Soit $x_1 \in E \setminus F$.

(a) Vérifier que $\pi_{x_1} = \pi_u$.

(b) On se propose de montrer que F et $Z[x_1]$ sont en somme directe.

Par l'absurde, on suppose qu'il existe $y \in (Z[x_1] \cap F) \setminus \{0\}$.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $y = P(u)(x_1)$.

i. Vérifier que P et π_{x_1} sont premiers entre eux.

ii. En déduire qu'il existe $U \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $x_1 = U(u)(y)$.
iii. Aboutir à une contradiction.

3. Montrer alors et par récurrence descendante que tout sous- espace stable admet un supplémentaire stable.
u est donc semi-simple.

C : Condition nécessaire et suffisante pour que u soit semi-simple

Le but de cette partie est de montrer que u est semi-simple si et seulement si u est sans facteur carré irréductible, c'est à dire que $\pi_u = \prod_{k=1}^{r} P_k$, avec les P_k qui sont irréductibles et deux à deux distincts.

1. On suppose que $\pi_u = \prod_{k=1}^{r} P_k$, avec les P_k qui sont irréductibles et deux à deux distincts.
Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u, on pose $E'_k = \ker(P_k(u))$.
(a) Montrer que les E'_k sont des sous-espaces vectoriels non nuls de E et stables par u.
(b) Montrer que $E = \bigoplus_{k=1}^{r} E'_k$.
(c) Soit $u_k = u|_{E'_k}$, montrer que $\pi_{u_k} = P_k$.
(d) Montrer que $F = \bigoplus_{k=1}^{r} (F \cap E'_k)$.
(e) En utilisant la partie (B), montrer alors que F admet un supplémentaire stable.
u est donc semi-simple.

2. On suppose que u est semi-simple et que par l'absurde u admet au moins un facteur carré irréductible, soit $\pi_u = P^2 Q$, avec P un polynôme irréductible, posons $F = \ker P(u)$, et soit S un supplémentaire de F stable par u.
(a) Montrer $(PQ)(u)$ s'annule sur F et S.
(b) Aboutir à une contradiction.

Fin de l'énoncé