Devoir surveillé n°3

le 26/11/2019

durée : 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice I

On considère la matrice $A = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 1+2\cos(2\alpha) & 2\sin(2\alpha) \\ 2\sin(2\alpha) & 1-2\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$ où α est un nombre réel.

1. Montrer que A est semblable à une matrice diagonale. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

2. En déduire $\exp(A)$.

Exercice II

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs réelles. On note $\|.\|_2$ la norme définie sur E par :

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f(t)^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour tout $f \in E$, on note

$$a_n(f) = \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t.$$

1. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, montrer que :

$$\int_{-1}^1 P(t)\mathrm{d}t + i\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}\mathrm{d}\theta = 0.$$

En déduire que

$$\int_0^1 P(t)^2\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi |P(e^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta.$$

2. Vérifier que, si $f \in E$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(f)^2 = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} a_k(f) t^k \right) f(t) \mathrm{d}t.$$

En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(f)^2$ converge et que l'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)^2 \leq \pi \|f\|_2^2.$$

3. On pose, pour $f \in E$,

$$\rho(f) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Montrer que ρ est une norme sur E. (*Dans cette question on pourra utiliser le théorème suivant : l'ensemble des fonctions polynômes dense dans* $(E, \|.\|_\infty)$).

4. Montrer que ρ n'est pas équivalente à la norme $\|.\|_2$. On pourra considérer les fonctions f_n définies, pour $n \geq 1$, par

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & \textbf{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right[\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \textbf{si } \quad x \in \left]\dfrac{1}{n}, 1\right] \end{cases}.$$

Problème

On considère une suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, u_0, u_1 deux nombres réels et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = u_n + a_{n-1} u_{n-1}.$$

Première partie

Dans cette partie on suppose $u_1 > u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = r^n$ où $r \in]0, 1[$.

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l strictement positif.

(b) Montrer que $l - u_n$ est équivalent à $\dfrac{l r^{n-1}}{1-r}$ quand n tend vers l'infini.

2. En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n x^n$ converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$.

3. On définit, pour $x \in [0, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty$.

Deuxième partie

On suppose dans cette partie que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge absolument. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $v_0 = |u_0|$, $v_1 = |u_1|$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 1, \quad v_{n+1} = v_n + |a_{n-1}| v_{n-1}.$$

1. Comparer $|u_n|$ et v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que :

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq v_{n+1} \leq v_n e^{|a_{n-1}|}.$$

3. Monter que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (v_{n+1} - v_n)$ converge.

4. En déduire la convergence absolue de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n)$ et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Troisième partie

On suppose dans cette partie que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ et que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge. On note, pour $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$, $L(u_0, u_1)$ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^n$ est convergente.

2. On définit l'application :

$$\begin{array}{rccl} L : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u_0, u_1) & \longmapsto & L(u_0, u_1) \end{array}$$

Vérifier que L est une application linéaire.

3. Donner $\dim \ker(L)$.

4. Soit $(u_0, u_1) \in \ker(L)$ tel que $(u_0, u_1) \neq (0, 0)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.

5. Soit $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(u_0, u_1) \neq (0, 0)$. Montrer que

$$(u_0, u_1) \in \ker(L) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n u_{n+1} < 0.$$

6. On prend $(u_0, u_1) \in \ker(L)$, $(u_0, u_1) \neq (0, 0)$. On définit $r_n = -\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = \dfrac{a_{n-1}}{r_{n-1}} - 1$ et $0 < r_n < a_n$.

(b) En déduire la convergence des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} r_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Quatrième partie

On suppose toujours que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ et que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge. On considère alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application :

$$\begin{array}{rccl} A_n : & [0, +\infty[& \longrightarrow & [0, +\infty[\\ & x & \longmapsto & A_n(x) = \dfrac{a_n}{1+x}, \end{array}$$

$B_n = A_0 \circ A_1 \circ ... \circ A_n$ et $\alpha_n = B_n(0)$.

1. Montrer que l'application $A : x \mapsto A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+x}$ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, +\infty[$:

$$|B_n'(x)| \leq \prod_{k=0}^{n} a_k,$$

et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|\alpha_n - \alpha_{n-1}| \leq \prod_{k=0}^{n} a_k.$$

3. Montrer qu'il existe un seul $r_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall u_1 \in \mathbb{R}$, $(-r_0 u_1, u_1) \in \ker(L)$ et que r_0 est strictement positif.

4. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_{n-1} - \alpha_n|$ converge.

Fin de l'énoncé