Devoir surveillé n°4

le 14/01/2020

durée : 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice I

Prolongement par continuité d'une fonction de deux variables

Soit $h \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$. On définit l'application $f : \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \to \mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = \frac{h(x) - h(y)}{x - y}.$$

1. Calculer, si possible, $\lim\limits_{y \to x} f(x,y)$ et $\lim\limits_{x \to y} f(x,y)$.

2. Prouver que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$.

3. Soit $\varphi : t \mapsto \begin{cases} t\ln(t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

(a) Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et pour $x \neq y$, $\Phi(x,y) = (f(y) - f(x))\ln|x-y|$. Montrer que Φ se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice II

Étude de normes et d'endomorphismes d'un espace de fonctions

Soit $E = \{f \in \mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}), f(0) = 0\}$, muni de sa structure naturelle d'espace vectoriel. On définit sur E les applications

$$N_1 : f \mapsto \|f'\|_\infty$$

et

$$N_2 : f \mapsto \|f - f'\|_\infty$$

où l'on rappelle que pour tout $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|.$$

1. On montre ici que N_1 et N_2 sont deux normes sur E.
   (a) Justifier que N_1 et N_2 sont bien définies sur E.
   (b) Montrer que N_1 est une norme sur E.
   (c) Montrer que N_2 est une norme sur E. Pour la propriété de séparation, on pourra introduire une certaine équation différentielle.

2. Le but de cette question est de montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.
   (a) Montrer que pour toute $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \|f'\|_\infty$. On pourra utiliser le théorème fondamental de l'analyse.
   (b) En déduire que $N_2 \leq 2N_1$.
   (c) Pour $f \in E$, on pose $g = f - f'$. En considérant cette égalité comme une équation différentielle d'inconnue f, exprimer f en fonction de g à l'aide d'une intégrale (on appliquera la méthode de variation de la constante).
   (d) En déduire que $N_1 \leq eN_2$ et que e est la meilleure constante possible.

3. Pour $f \in E$, on pose

$$u : t \mapsto f'(t) - f'(0)$$

et

$$v : t \mapsto \int_0^t f(x)\mathrm{d}x + f'(0)t.$$

On définit alors sur E les applications

$$\varphi : f \mapsto u$$

et

$$\psi : f \mapsto v.$$

   (a) Montrer que φ et ψ sont des endomorphismes de E.
   (b) Montrer que $\psi : (E, N_1) \to (E, N_1)$ est continu. Que peut-on dire si l'on munit E de la norme N_2 au départ et à l'arrivée ?
   (c) Montrer que $\varphi : (E, N_1) \to (E, N_1)$ n'est pas continu.
   (d) Donner $\sup\limits_{f \neq 0} \dfrac{N_1(\psi(f))}{N_1(f)}$ en justifiant l'existence de cette quantité.

Problème

Quelques propriétés de l'exponentielle de matrices

$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n de termes réels ; n est un entier, $n \geq 1$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sera muni de la norme euclidienne, c'est-à-dire , pour tout $X = {}^t(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|X\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. L'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sera muni de la norme définie par :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|A\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}.$$

1. Montrer que pour tout couple de matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

2. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Établir que la série de matrices de terme général $U_k = \dfrac{A^k}{k!}$ avec $k \in \mathbb{N}$ est convergente.

Soit $\exp(A)$ la somme de cette série : $\exp(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

(b) Démontrer l'inégalité : $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$

(c) Établir la relation : $B\exp(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} BA^k$.

Quelle conclusion y-a-t-il lieu d'en tirer sur les matrices $\exp(A)$ et $\exp(A_2)$, lorsque A_1 et A_2 sont deux matrices semblables ?

3. (a) Montrer que si deux matrices A et B commutent, alors :

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$$

(b) Soient les trois matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $\exp(D)$ et $\exp(F)$; comparer $\exp(E)$ et le produit $\exp(D)\exp(F)$.

4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|(A+H)^k - A^k\| \leq (\|A\| + \|H\|)^k - \|A\|^k.$$

(b) En déduire que pour tout $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|\exp(A+H) - \exp(A)\| \leq e^{\|A\|}(e^{\|H\|} - 1),$$

puis que l'application exponentielle est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Soit f_A la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $f_A(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k$.

(a) Établir que f_A est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Exprimer, en fonction de $f_A(x)$ et de I_n, l'expression de $A.\displaystyle\int_0^x f_A(t)\mathrm{d}t$ où x est un réel ; en déduire que la fonction f_A est dérivable et calculer sa dérivée. Montrer que f_A est indéfiniment dérivable.

6. (a) Soit θ un réel et soit C_θ la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$: $C_\theta = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(C_\theta)$.

Est-ce que l'application $A \longmapsto \exp(A)$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est injective ?

(b) Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Démontrer que la matrice $\exp(A) - I_n$ peut s'écrire $A(I_n + S_A)$. Établir qu'il existe un réel α ($\alpha > 0$) tel que $\|A\| < \alpha$ implique $\|S_A\| < 1$.

(c) Soit T une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Établir que si $\|T\| < 1$, la matrice $I_n + T$ est inversible (démontrer par exemple que le seul vecteur X de $\mathbb{R}^n$ tel que $(I_n+T)X$ est nul, est le vecteur nul).

(d) Soit M une matrice appartenant à la boule ouverte $B(O,\alpha)$ de centre la matrice nulle O et de rayon α ; α est le réel défini dans à l'alinéa (b) ; établir que l'égalité entre les matrices $\exp(M)$ et I_n est équivalente à la nullité de M.

7. Soient B et H deux matrices données de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit k un entier, $k \geq 1$; soit g_k l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$g_k(x) = (B + xH)^k.$$

Les deux matrices B et H ne sont pas supposées commutables.

(a) Établir que la fonction g_k est continûment dérivable ; calculer les dérivées des fonctions g_1, g_2 puis de la fonction g_k.

(b) En déduire l'inégalité :

$$\|(B+H)^k - B^k\| \leq k\|H\|(\|B\| + \|H\|)^{k-1}.$$

8. Soit x un réel, $x > 0$; soit $T(A,x)$ la matrice définie par la relation :

$$T(A,x) = \frac{1}{x^2}(\exp(xA) - I_n - xA).$$

(a) Démontrer que la fonction $x \longmapsto T(A,x)$ se prolonge par continuité en 0. Donner un majorant simple de sa norme en utilisant l'expression de $T(A,x)$ au moyen d'une intégrale (par exemple).

(b) Soit k un entier, $k \geq 1$; en remarquant la relation :

$$\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k - \exp(A) = \left[\exp\left(\frac{1}{k}A\right) - \frac{1}{k^2}T\left(A, \frac{1}{k}\right)\right]^k - \left[\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\right]^k$$

et en utilisant l'inégalité établie en 6., déterminer la limite de la suite de matrices de terme général :

$$\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

(c) Démontrer que l'application $A \longmapsto \det A$ est une application continue de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Déterminer le développement limité en $\frac{1}{k}$ de $\det\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)$, contenant les deux premiers termes.

En déduire la valeur du déterminant de la matrice $\exp(A)$.

Fin de l'énoncé