Devoir surveillé n°5

le 11/02/2020

durée : 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice

On étudie dans cet exercice la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in]-1,1[, \quad u_n(t) = \frac{t^n}{1+t^n}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge normalement sur $[-\alpha,\alpha]$ pour tout α dans $]0,1[$.

En déduire que la fonction somme $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est définie et continue sur $]-1,1[$.

2. On fixe pour cette question un élément t de $[0,1[$. Pour x réel, la partie entière de x est notée $\mathrm{E}(x)$.
Pour k entier naturel, on définit sur $[1,+\infty[$ la fonction f_k par :

$$\forall x \geq 1, \quad f_k(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\mathrm{E}(x)} t^{(k+1)n}.$$

(a) Montrer que, pour x fixé dans $[1,+\infty[$, la suite $(|f_k(x)|)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, de limite nulle.
En déduire que la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$.

(b) En remarquant que

$$S(t)=\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{\mathrm{E}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{(k+1)n},$$

établir à l'aide du théorème de la double limite :

$$S(t)=\sum_{k=0}^{\infty}v_k(t) \text{ où } v_k(t)=(-1)^k\frac{t^{k+1}}{1-t^{k+1}}.$$

3. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} w_k$ définie par

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \forall t\in[0,1],\quad w_k(t)=(-1)^k\frac{t^{k+1}}{1+t+t^2+...+t^k}$$

converge uniformément sur $[0,1]$.

4. Déduire des questions précédentes l'existence et la valeur de $\lim_{t\to1^-}(1-t)S(t)$, puis un équivalent de $S(t)$ au voisinage de 1.

Problème

Dans tout le problème n et p désignent des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 et on pose $E_p=\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
L'espace E_p est muni de sa structure euclidienne canonique, la norme euclidienne d'un vecteur x de E_p est notée $\|x\|$, le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E_p est noté $(x|y)$.
Si u est un vecteur non nul appartenant à E_p, D_u désigne la droite vectorielle engendrée par u et si x est un vecteur de E_p, $P_{D_u}(x)$ est le projeté orthogonal de x sur la droite D_u.
Si F est un sous-espace vectoriel de E_p, le supplémentaire orthogonal de F dans E_p est noté $F^\perp$.
Pour toute matrice A appartenant à $\mathscr{M}_{m,l}(\mathbb{R})$ on note Φ_A l'application linéaire de $\mathscr{M}_{l,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall X\in\mathscr{M}_{l,1}(\mathbb{R}),\quad \Phi_A(X)=AX.$$

Pour tout r appartenant à $\mathbb{N}^*$ et toute famille $(u_i)_{1\le i\le r}$ de vecteurs de E_p, $\mathrm{Vect}(u_1,...,u_r)$ est le sous-espace vectoriel de E_p engendré par les vecteurs $u_1,...,u_r$.

Partie I : Une décomposition de la matrice X

Les notations introduites dans cette partie seront utilisées dans toute la suite du problème. On définit la matrice $X=(x_{ij})_{1\le i\le p,1\le j\le n}$ appartenant à $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ appelée nuage , ses colonnes $c_1,...,c_n$ sont appelées points du nuage, X est donc un nuage de n points dans un espace de dimension p.
On définit la matrice $V=X^tX$.
On appelle F le sous-espace vectoriel de E_p engendré par les vecteurs colonnes $c_1,...,c_n$ et on suppose que $\dim F=r$ et $p>r\ge1$.

1. (a) Montrer que la matrice V est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des réels positifs ou nuls.
On note $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres de V et on suppose que $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_p$.
Justifier l'existence d'une base orthonormale $(e_1, ..., e_p)$ de E_p telle que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad Ve_i = \lambda_i e_i.$$

(b) • Montrer que le noyau de Φ_V est égal à celui de $\Phi_{{}^tX}$.
• En déduire que le rang de V est égal à r.
• Montrer que : $\lambda_{r+1} = ... = \lambda_p = 0$.
• Que peut-on dire de $\lambda_1, ..., \lambda_p$?
• Montrer que $(e_1, ..., e_r)$ est une base de F.

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ on note π_i la matrice dans la base canonique de E_p, de la projection orthogonale de E_p sur D_{e_i}, les vecteurs $e_1, ..., e_p$ ont été définis au $1.a$.

2. Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \pi_i = I_p$ (où I_p est la matrice appartenant à $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont nuls excepté les éléments diagonaux qui valent 1).
3. Déterminer $\pi_i\pi_j$ pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
4. Calculer pour tout $i \in [\![r + 1, p]\!]$, $\pi_i X$ et en déduire que : $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \pi_i X$.
5. Pour tout $s \in [\![1, r]\!]$, on pose $X_s = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \pi_i X$.
   (a) Montrer que : $\mathrm{Im}\Phi_{X_s} \subset \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_s)$.
   (b) Calculer $X_s{}^tXe_j$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$ et déterminer le rang de X_s.

Partie II : Une norme euclidienne de matrices carrées

Pour tout entier naturel q non nul et toute matrice, carrée $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq q}$ appartenant à $\mathscr{M}_q(\mathbb{R})$, on pose $\mathrm{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

On sait que tr définit une application linéaire de $\mathscr{M}_q(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ et que si A et B appartiennent respectivement à $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. On sait également que si deux matrices A et B sont semblables alors $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

Pour tout M et N appartenant à $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ on pose : $\Theta(M, N) = \mathrm{tr}(M^tN)$.

1. Montrer que $(M, N) \mapsto \Theta(M, N)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.
Pour toute matrice M appartenant à $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, on note $\|M\| = \sqrt{\mathrm{tr}(M^tM)}$, appelé ici norme euclidienne de M.
2. Calculer pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, $\Theta(\pi_i X, \pi_j X)$. On distinguera les cas $i = j$ et $i \neq j$, et on exprimera les résultats en fonction des nombres $\lambda_1, ..., \lambda_p$.
3. Calculer $\|X - X_s\|^2$ en fonction de $\lambda_1, ..., \lambda_p$, pour tout s appartenant à $[\![1, r]\!]$.

Partie III : Approximation de X par une matrice de rang inférieur ou égal à s dans $(\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}), \Theta)$

On rappelle que si H_1 et H_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E_p, alors :

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2).$$

On considère un entier naturel s appartenant à $[\![1, r-1]\!]$et une matrice N appartenant à $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{rg}(N) \leq s$.

1. Justifier rapidement l'existence d'une base orthonormale $(a_1, ..., a_p)$ de E_p formée de vecteurs propres de $(X-N)^t(X-N)$. On note $\gamma_1, ..., \gamma_p$ les valeurs propres de $(X-N)^t(X-N)$ associées respectivement aux vecteurs $a_1, ..., a_p$ et on suppose que $\gamma_1 \geq ... \geq \gamma_p$.

2. Soit i un entier appartenant à $[\![1, r-s]\!]$ et G un sous-espace de E_p de dimension supérieure ou égale à i.

(a) Montrer que $\dim G \cap \operatorname{Vect}(a_i, ..., a_p) \geq 1$.

(b) En déduire qu'il existe un vecteur unitaire u appartenant à G tel que

$$\|{}^t(X-N)u\|^2 \leq \gamma_i.$$

(c) On considère l'espace vectoriel $H = (\ker \Phi_{{}^tN}) \cap \operatorname{Vect}(e_1, ..., e_{s+i})$.

- Montrer que : $\dim H \geq i$.
- En déduire : $\lambda_{s+i} \leq \gamma_i$.

3. (a) Montrer que : $\|X-N\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \gamma_i$.

(b) En déduire que :$\|X-N\|^2 \geq \displaystyle\sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i$

(c) En déduire que X_s réalise la meilleure approximation de X par des matrices de rang inférieur ou égal à s au sens de la norme euclidienne définie plus haut sur $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

Fin de l'épreuve