Devoir surveillé $n^\circ 6$

le 10/03/2020

durée : 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Problème I

On désigne par $\mathscr{A}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, par $\mathscr{I}$ le sous-espace des fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}$. On considère l'application linéaire $\mathscr{F}$ de $\mathscr{I}$ dans $\mathscr{A}$ définie par :

$$f \mapsto \widehat{f} \text{ où } \widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)\mathrm{d}t \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}.$$

La fonction $\widehat{f}$ est appelée transformée de Fourier de la fonction f.

I - Préliminaire

1. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On pose $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

2. On définit deux fonctions f, g sur $\mathbb{R}$ par les formules :

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) + f^2(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

(b) En déduire que $J = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

II - Généralités et premiers exemples

1. Dans cette question, f désigne une fonction appartenant à $\mathscr{I}$.

(a) Justifier la définition de la fonction $\widehat{f}$.

(b) On suppose que la fonction f est à valeurs réelles. Montrer que si f est une fonction paire, alors $\widehat{f}$ est une fonction paire et à valeurs réelles. Que peut-on dire de $\widehat{f}$ si la fonction f est impaire ?

2. Premier exemple : on considère la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$p(t) = \begin{cases} 1-t & \textbf{si } t \in [0,1] \\ 0 & \textbf{si } t \in]1,+\infty[\\ p(-1) & \textbf{si } t \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

(a) Montrer que p appartient à $\mathscr{I}$.

(b) Expliciter $\widehat{p}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction $\widehat{p}$ appartient-elle à $\mathscr{I}$?

3. Deuxième exemple : pour tout entier naturel n, on considère la fonction E_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad E_n(t) = |t|^n e^{-|t|}.$$

On se propose de déterminer la transformée de Fourier $\widehat{E_n}$ de cette fonction. Pour cela, on fixe x dans $\mathbb{R}$, on désigne par α le nombre complexe $1 - ix$ et l'on pose

$$K_n = \int_0^{\infty} t^n e^{-\alpha t} \mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que E_n appartient à $\mathscr{I}$ et exprimer $\widehat{E_n}(x)$ à l'aide de la partie réelle de K_n.

(b) Exprimer K_n en fonction de n et α.

(c) Expliciter $\widehat{E_0}(x)$, $\widehat{E_1}(x)$ et $\widehat{E_2}(x)$.

(d) Montrer qu'il existe une fonction β, définie sur $\mathbb{N}$, à valeurs réelles, que l'on explicitera, telle que

$$\widehat{E_n}(x) = \frac{2(n!)\cos[(n+1)\arctan x]}{(1+x^2)^{\beta(n)}}.$$

(e) La fonction $\widehat{E_n}$ appartient-elle à $\mathscr{I}$?

III - Transformée de Fourier de $\mathscr{H}_0$

Dans cette partie, on désigne par $\mathscr{H}_0$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathscr{H}_0(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}$ et l'on se propose de déterminer la transformée de Fourier de $\mathscr{H}_0$. Pour cela, on fixe x dans $\mathbb{R}$.

1. En utilisant la partie préliminaire, montrer que $\mathscr{H}_0$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{H}_0(t)\mathrm{d}t$.

2. On définit sur $\mathbb{R}$ la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g_n(t) = t^{2n} e^{\frac{-t^2}{2}}.$$

(a) Montrer que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, la fonction g_n appartient à $\mathscr{I}$.

(b) On considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n. En déduire une expression simple de $\dfrac{I_n}{(2n)!}$.

3. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n.n!}$ et préciser la valeur de sa somme.

4. Vérifier que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto e^{\frac{-t^2}{2}}\cos(xt)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

5. Justifier avec soin l'égalité :

$$\widehat{\mathscr{H}_0}(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\int_0^{+\infty} t^{2n} e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

6. Déduire de ce qui précède l'existence d'un nombre réel λ_0 que l'on explicitera, tel que $\widehat{\mathscr{H}_0} = \lambda_0 \mathscr{H}_0$.

Problème II

On désire étudier sur un certain nombre d'années les mouvements migratoires d'une population lors des vacances d'été.
L'observation de cette population a conduit à la construction d'un modèle mathématique dont les hypothèses sont les suivantes :
$\boxed{H_1 :}$ *Le territoire sur lequel évolue la population durant les vacances d'été est divisé en trois régions, notées* $1, 2, 3$.
$\boxed{H_2 :}$ *Chaque année, tout individu de la population étudiée choisit une région et une seule pour y passer toutes les vacances d'été.*
$\boxed{H_3 :}$ *Le choix d'une région par un individu pour y passer ses vacances d'été est un phénomène aléatoire qui évolue dans le temps à partir d'une année initiale appelée année* 1.

On note $A_i(n)$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et $n \geq 1$, l'événement : « choisir la région i pour y passer ses vacances d'été, l'année n » et $\alpha_i(n) = p[A_i(n)]$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) la probabilité de choisir l'année n, la region i pour y passer ses vacances d'été.
$\boxed{H_4 :}$ $\alpha_1(1) = 0.2$, $\alpha_2(1) = 0.45$ et $\alpha_3(1) = 0.35$.
$\boxed{H_5 :}$ *La probabilité de choisir la région* i ($i \in \{1, 2, 3\}$), *pour y passer ses vacances l'année* $n+1$, *ne dépond que du choix effectué l'année*n.

On note $a_{ij} = p[A_i(n+1)/A_j(n)]$, $1 \leq i \leq 3,\ \ 1 \leq j \leq 3$, la probabilité de choisir la région i l'année $n+1$, sachant que l'année n, on choisi la région j.
On suppose que $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$, a_{ij} *est indépendant de l'année considérée et que les* a_{ij} *sont les éléments de la matrice* M *suivante :*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{H_6 :}$ *On suppose que la population étudiée reste inchangée durant toutes les années prises en considération dans ce modèle.*

1. (a) Soit B_n l'événement « choisir chaque année la région 2 durant toutes les n premières années ».
Calculer $p(B_3)$.
Exprimer $p(B_n)$ en fonction de n.

(b) Sachant qu'un individu choisit la région 1 l'année 2, quelle est la probabilité qu'il ait choisi la région 2 l'année 1 ?

(c) Calculer la probabilité pour qu'un individu change de région entre la première année et la deuxième année.

2. (a) Exprimer, en le justifiant, une relation entre les matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(n+1) \\ \alpha_2(n+1) \\ \alpha_3(n+1) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1(n) \\ \alpha_2(n) \\ \alpha_3(n) \end{pmatrix},$$

puis entre les matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(n+1) \\ \alpha_2(n+1) \\ \alpha_3(n+1) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1(1) \\ \alpha_2(1) \\ \alpha_3(1) \end{pmatrix}.$$

(b) Calculer $\det(M)$.

(c) Calculer, dans le corps $\mathbb{C}$, les valeurs propres de M.

(d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice M^n s'écrit sous-la forme :

$$M^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

où λ est un élément de $\mathbb{C}$ de module strictement inférieur à 1, $\overline{\lambda}$ son conjugué, $P = \begin{pmatrix} 1 & x' & x'' \\ 1 & y' & y'' \\ 1 & z' & z'' \end{pmatrix}$ est une matrice inversible à éléments dans $\mathbb{C}$. (on ne cherchera pas à déterminer les éléments des deux dernières colonnes de P).

$P^{-1} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de P. (on ne cherchera pas ici à calculer la valeur des éléments de P^{-1}).

3. (a) Montrer que la suite de matrices $(M^n)_{n\geq 1}$ converge et calculer sa limite.

(b) Soient $U = (u_{ij})_{1\leq i\leq 3, 1\leq j\leq 3}$ et $V = (v_{ij})_{1\leq i\leq 3, 1\leq j\leq 3}$ deux matrices telles que la somme des éléments de chaque colonne de chacune d'elles soit égale à 1. Montrer qu'il est de même pour la matrice UV.

(c) Déduire de ce qui précède les valeurs des éléments a, a', a'' de la matrice P^{-1}.

(d) Montrer que les suites $(\alpha_1(n))_{n\geq 1}$, $(\alpha_2(n))_{n\geq 1}$, $(\alpha_3(n))_{n\geq 1}$ convergent. Calculer leurs limites.

Fin de l'épreuve