Devoir surveillé $n^\circ 1$

28/09/2020

Durée 3 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice I

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ ($n \in \mathbb{N}^*$), l'espace vectoriel réel, formé des polynômes de $\mathbb{R}[X]$, de degré inférieure ou égal à n ; ainsi que du polynôme nul. On note $P'(X)$, le polynôme dérivé de $P(X)$ et $P''(X)$ le polynôme dérivé de $P'(X)$.
On adoptera la notation habituelle :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

On appelle base canonique la base $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant p \leqslant n+1$. On considère p polynômes non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$ de degrés distincts deux à deux. Montrer que ces p polynômes sont linéairement indépendants.

2. Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui même, définie par :

$$P(X) \mapsto f[P(X)] = abP(X) + (1-a-b)XP'(X) + X^2P''(X)$$

où a et b sont des entiers tels que $0 \leqslant a < b$.

2*a*. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer les images par f des éléments de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

2*b*. Discuter suivant la position de n par rapport à a et b, la bijectivité de f.
Dans le cas où f n'est pas bijective, déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

2*c*. Déterminer suivant les valeurs des réels α, β, γ et δ l'ensemble des polynômes $P(X)$ solutions de l'équation :

$$2P(X) - 2XP'(X) + X^2P''(X) = \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta.$$

3. Soit φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui même définie comme suit :
Si

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0,$$

alors

$$\varphi[P(X)] = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1}X + a_n.$$

3*a*. Démontrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer, l'image par φ, de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

3*b*. Soit
$$E = \{P(X) \in \mathbb{R}_n[X] / \varphi[P(X)] = P(X)\}$$
et
$$F = \{Q(X) \in \mathbb{R}_n[X] / \varphi[Q(X)] = -Q(X)\}.$$
Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ et qu'on a $\mathbb{R}_n[X] = E \oplus F$.

4. Déterminer, suivant la parité de n, la dimension de E.

Exercice II

Considérons la matrice $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A. $id_{\mathbb{R}^3}$ désigne l'endomorphisme identique de $\mathbb{R}^3$ et I_3 la matrice unité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. *Changement de base*

1*a*. Soit λ un nombre réel. Vérifier que $\det(A - \lambda I_3) = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$.

1*b*. Monter que $\operatorname{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^3})$ et $\operatorname{Ker}(f - 2id_{\mathbb{R}^3})$ sont des droites vectoriels.

1*c*. Donner un vecteur générateur e_1 de $\operatorname{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^3})$ de première composante égale à 1 et un vecteur générateur e_2 de $\operatorname{Ker}(f - 2id_{\mathbb{R}^3})$ de première composante égale à 1.

2. **2*a*.** Montrer qu'un vecteur $u = (x, y, z)$ appartient à $\operatorname{Vect}(e_1, e_2)$ si, et seulement si $x = y$.

2*b*. e_3 désigne le vecteur $(1, 0, 1)$, $\mathscr{B}$ désigne la famille de vecteurs (e_1, e_2, e_3). Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Considérons la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3*a*. Justifier l'inversibilité de P et calculer P^{-1}.

3*b*. Calculer $P^{-1}AP$, matrice que nous noterons dans la suite T.

4. *Commutant de A*

4*a*. Soit M appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $AM = MA$ nous noterons N la matrice $P^{-1}MP$.

i) Montrer que $TN = NT$.

ii) Écrivons la matrice N sous la forme $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$, $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ des nombres réels. Calculer TN et NT. Montrer ensuite que : $b = c = d = f = g = 0$ et $e = i$.

iii) En déduire la matrice M.

4*b*. Quel est l'ensemble des matrices M appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$? Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de dimension 3.

Problème

Soit $(G,.)$ un groupe fini noté multiplicativement. On définit le centre de G par :

$$Z_G = \{g \in G / gx = xg, \ \ \forall x \in G\}.$$

1. Montrer que Z_G est un sous-groupe de G.

2. Déterminer le centre des groupes suivants : $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), .)$ et $(\mathscr{S}_3, \circ)$ (groupe de permutations de $\{1, 2, 3\}$).

3. Pour $x \in G$, on définit $G_x = \{g \in G / gx = xg\}$. Montrer que G_x est un sous-groupe de G.

4. On définit sur G les deux relations $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ suivantes par :

$$x\mathscr{R}y \Leftrightarrow \exists g \in G : xg = gy$$

et, pour x fixé dans G,

$$a\mathscr{S}b \Leftrightarrow ab^{-1} \in G_x.$$

4*a*. Montrer que $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ sont des relations d'équivalence sur G.

4*b*. Soit $x \in G$, on note $[G : G_x]$ l'ensemble des classes modulo $\mathscr{S}$ et Θ_x la classe de x modulo $\mathscr{R}$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & [G : G_x] & \longrightarrow & \Theta_x \\ & \overline{a} & \longmapsto & a^{-1}xa \end{array}$$

est bien définie et bijective ($\overline{a}$ désigne la classe de a modulo $\mathscr{S}$).

4*c*. Montrer que pour tout $x \in G$, $\operatorname{Card}(\overline{a}) = \operatorname{Card}(G_x)$. En déduire que $\operatorname{Card}(\Theta_x) = \dfrac{\operatorname{Card}(G)}{\operatorname{Card}(G_x)}$.

4*d*. Soit $x \in Z_G$, montrer que $\operatorname{Card}(\Theta_x) = 1$.

4*e*. On note $\Theta_{x_1}, \Theta_{x_2}, \ldots, \Theta_{x_r}$ les classes modulo $\mathscr{R}$ qui sont différentes des singletons. Montrer que

$$\operatorname{Card}(G) = \operatorname{Card}(Z_G) + \sum_{i=1}^{r} \frac{\operatorname{Card}(G)}{\operatorname{Card}(G_{x_i})}.$$

5. On suppose que $\operatorname{Card}(G) = p^\alpha$ (p premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$). Montre que p divise $\operatorname{Card}(Z_G)$.

Fin de l'épreuve