MP – CPGE Mohamed VI-Kénitra
Année scolaire 20/21

Devoir surveillé $n^\circ 2$

20/11/2020
Durée 2 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré. Les exercices sont indépendants.

Exercice ①

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$, et u l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad u(P) = X(X-1)P' - nXP.$$

1. Vérifier que $u \in \mathscr{L}(E)$.
2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, et $P \in E$.
   Montrer que $u(P) = \lambda P$, si et seulement si P est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :
   $$(E_\lambda) \quad x(x-1)y' - (nx+\lambda)y = 0.$$
3. Justifier qu'une fonction polynôme est solution de (E_λ) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle l'est sur $]1, +\infty[$.
4. Résoudre (E_λ) sur $]1, +\infty[$.
5. Montrer que (E_λ) admet des solutions polynomiales non nulles de degré inférieur ou égal à n si et seulement si λ est un entier négatif compris entre $-n$ et 0.
6. En déduire que $\mathrm{Sp}(u) = \{-n, \dots, -1, 0\}$. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice ②

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Soient A et B sont deux parties de E. Montrer les propriétés suivantes :
   1*a*. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   1*b*. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et que, en général, l'inclusion est stricte (considérer des exemples sur $(\mathbb{R}, |.|)$).
   1*c*. $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.
   1*d*. $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$ et que, en général, l'inclusion est stricte.
2. Soit O une partie ouverte de E. Montrer que pour tout $a \in E$,
   $$a + O = \{a + x | x \in O\}$$
   est un ouvert de E.

Exercice ③

1. Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles non colinéaires. Si (x, y) appartient à $\mathbb{R}^2$, on pose

$$N(x, y) = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |xf(t) + yg(t)|.$$

Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2. Que vaut N lorsque $a = 0, b = 1, f(t) = t, g(t) = 1 - t$?

Exercice ④

Dans l'espace $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2 à coefficients réels on considère les normes définies, si $P(X) = aX^2 + bX + c$, par

$$\|P\|_\infty = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)| \text{ et } \|P\| = \max(|a|, |b|, |c|).$$

1. Exprimer a, b et c en fonction de $P(0), P\left(\frac{1}{2}\right)$ et $P(1)$.

2. Montrer que les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|$ sont équivalentes et trouver la norme subordonnée de l'identité $Id_E : (E, \|.\|) \longrightarrow (E, \|.\|_\infty)$.

3. En utilisant la question **1.**, trouver la norme subordonnée de l'identité $Id_E : (E, \|.\|_\infty) \longrightarrow (E, \|.\|)$.

4. $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ désignent respectivement les applications linéaires, qui à P associent respectivement sa partie paire et sa partie impaire.

4*a*. Exprimer $\mathscr{P}(P)$ et $\mathscr{I}(P)$ en fonction de P.

4*b*. Trouver les normes subordonnées des endomorphismes $\mathscr{P} : (E, \|.\|_\infty) \longrightarrow (E, \|.\|_\infty)$ et $\mathscr{I} : (E, \|.\|_\infty) \longrightarrow (E, \|.\|_\infty)$.

Exercice ⑤

Soit $E = \mathscr{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ des applications de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$ à valeurs réelles.

1. Montrer que l'on définit une norme en posant

$$\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_2 = |f(0)| + \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Montrer que l'on a les inégalités

$$\|f'\|_1 \leqslant \|f'\|_2 \text{ et } \|f\|_\infty \leqslant \|f\|,$$

où $\|f'\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f'(t)| \mathrm{d}t$ et $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t)|$.

3. En utilisant la fonction f_n définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \dfrac{\sin(n\pi x)}{n}$, montrer que $\|.\|_\infty$ et $\|.\|$ ne sont pas équivalentes.

Exercice ⑥

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = d(x, \mathbb{Z})$$

où $d(x, \mathbb{Z}) = \inf\{|x - p| / p \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que la fonction f est périodique de période 1 (comparer $f(x)$ et $f(x + 1)$).

2. Représenter graphiquement la fonction f.

Fin de l'épreuve