# DEVOIR SURVEILLÉ $n^\circ 3$

05/01/2021
Durée 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré. Les exercices sont indépendants.

## Exercice

Soit $a$ un réel positif ou nul. On considère la matrice $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a-2 & a & 1 \\ a & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A(0)$ admet 1 et -1 comme seules valeurs propres réelles.
   Donner les sous-espaces propres correspondants.

Dans la suite, on suppose $a > 0$.

2. Montrer que les valeurs propres de $A(a)$ sont les réels $\lambda$ solutions de l'une des équations :

$$\lambda^2 = (a-1)^2 \quad \text{et} \quad \lambda^2 + a\lambda + 1 = 0.$$

3. a) Déduire de la question précédente la valeur de $a$ pour laquelle $A(a)$ n'est pas inversible.
   b) Pour cette valeur, dire si $A(a)$ est diagonalisable.
4. On suppose dans cette question que $a > 2$.
   a) Montrer que $A(a)$ possède 4 valeurs propres distinctes deux à deux.
   b) En déduire que $A(a)$ est diagonalisable.

## Problème ①

Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
• On note $\mathrm{id}_E$ l'application identique de $E$.
• Pour tout endomorphisme $f$ de $E$, on note $f^0 = \mathrm{id}_E$, et pour tout entier naturel $k$, $f^{k+1} = f^k \circ f$.
• Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme $f$ de $E$ est *cyclique d'ordre* $p$ s'il existe un élément $x_0$ de $E$ vérifiant les trois conditions suivantes :

- $f^p(x_0) = x_0$,
- la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ est génératrice de $E$,
- la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.

La famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ est alors appelée *cycle* de $E$.

Partie I : Étude d'un exemple

Dans cette partie, $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $E$. On considère l'endomorphisme $f$ de $E$ dont la matrice associée dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

**1.** Vérifier que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de $E$ et déterminer la matrice associée à $f$ relativement à cette base.

**2.** Montrer que $f$ est cyclique d'ordre 4 et que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est un cycle de $f$.

**3.** Montrer que $f^4 = \mathrm{id}_E$

**4.** Montrer que $A$ est semblable à

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$i$ étant le nombre complexe tel que $i^2 = -1$ et donner une matrice $P$ telle que $A = PDP^{-1}$.

Partie II : Cas général

Dans cette partie $E$ désigne un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, en on considère un endomorphisme $f$ de $E$ cyclique d'ordre $p$.
Soit $(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ un cycle de $f$.

**1.** Montrer $p \geqslant n$.

**2.** Montrer que $f^p = \mathrm{id}_E$. L'endomorphisme $f$ est-il bijectif?

**3.** On note $m$ le plus grand des entiers naturels $k$ tels que la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{k-1}(x_0))$ soit libre.

**3*a*.** Montrer que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire des $m$ vecteurs $x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0)$.

**3*b*.** Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $k$ supérieur ou égal à $m$, le vecteur $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des $m$ vecteurs $x_0, f(x_0), ..., f^{m-1}(x_0)$.

**3*c*.** En déduire que $m = n$ et que la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ est une base de $E$.

**4.** On note $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ les $n$ nombres complexes tels que

$$f^n(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + ... + a_{n-1} f^{n-1}(x_0).$$

**4*a*.** On considère l'endomorphisme $g$ de $E$ défini par

$$g = a_0 \mathrm{id}_E + a_1 f + ... + a_{n-1} f^{n-1}.$$

Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, g(f^k(x_0)) = f^{n+k}(x_0)$.
En déduire que

$$f^n = a_0 \mathrm{id}_E + a_1 f + ... + a_{n-1} f^{n-1}.$$

**4*b*.** Déterminer la matrice associée à $f$ relativement à la base $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ à l'aide des coefficients $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$.

**5.** On suppose dans cette question que $f$ est un cycle d'ordre $n = \dim(E)$.

**5*a*.** Que devient la matrice de $f$ dans la base $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ définie dans la question 4.b.

**5*b*.** Soit $v \in E$ un vecteur non nul tel qu'il existe un complexe $\lambda$ vérifiant $f(v) = \lambda v$. Montrer que $\lambda^n = 1$.

**5*c*.** Soit $\lambda_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{id}_E)$ est une droite vectorielle. On note $x_k$ un vecteur qui engendre cette droite.

**5*d*.** Soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x_k = 0$ une combinaison linéaire nulle des $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P(\lambda_k) x_k = 0.$$

En déduire que la famille $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est libre.

**5*e*.** Déterminer la matrice de $f$ dans cette base.

## Problème ②

Le but de ce problème est d'étudier la nature de la série $\sum u_n$ pour des suites $(u_n)$ vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

**1.** Soit $u_n$ le terme général d'une série à termes réels strictement positifs. On suppose qu'il existe un entier naturel $n_0$ et une suite $(v_n)$ à termes réels strictement positifs tels que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Montrer que : ( $\sum v_n$ converge ) $\Rightarrow$ ( $\sum u_n$ converge ) et ( $\sum u_n$ diverge) $\Rightarrow$ ( $\sum v_n$ diverge ).

**2.** Soit $u_n$ le terme général d'une série à termes réels strictement positifs .
On suppose qu'il existe un réel $\beta$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

et on considère la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha$ est un réel quelconque différent de $\beta$.

**2*a*.** Donner un équivalent de la différence $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ lorsque $n$ tend vers $\infty$, puis à l'aide des résultats de la question 1) , établir les résultats suivants :

$$\beta > 1 \Rightarrow \sum v_n \text{ converge et } \beta < 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ diverge}$$

**2*b*.** *Exemples :*
Étudier la nature des séries $\displaystyle\sum \frac{2.4...2n}{3.5....(2n+1)}$ et $\displaystyle\sum \frac{n.n!}{(a+1)(a+2)...(a+n)}$ où $a > 0$.

**3.** Dans cette question, on cherche à étudier de plus près le cas $\beta = 1$, dans un cas particulier . On considère une série $\sum u_n$, à termes réels strictement positifs et on suppose qu'il existe une suite $(v_n)$ telle que :

◇ la série $\sum v_n$, converge absolument,

◇ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + v_n$.

**3*a*.** Montrer que les séries $\sum \dfrac{v_n}{n}$ et $\sum (v_n)^2$ sont convergentes.

**3*b*.** On pose $a_n = \ln(nu_n)$. Montrer que la série $\sum (a_{n+1} - a_n)$ est convergente.

En déduire qu'il existe un réel $K > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{K}{n}$, puis conclure sur la nature de la série $\sum u_n$.

**3*c*.** *Exemple :* Étudier la nature de la série $\sum \left[\dfrac{4.6..2n}{3.5.7...(2n+1)}\right]^2$.

Fin de l'épreuve



CPGE Mohamed VI-Kénitra