MP – CPGE Mohamed VI-Kénitra

Année scolaire 21/22

Devoir surveillé $n^\circ 1$

12/10/2021

Durée 3 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice I

On pose $A = 1 + \sqrt{2}$.

1. **1*a*.** Démontrer (par exemple par récurrence) que pour tout entier naturel n, il existe un couple (p_n, q_n) d'entiers naturels tels que $A^n = p_n + q_n\sqrt{2}$.

   1*b*. Montrer que le couple (p_n, q_n) est unique (on pourra utiliser sans le justifier le fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

2. Préciser les valeurs de p_0, q_0, p_1 et q_1.

3. Établir que pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{cases} p_{n+1} &= p_n + 2q_n \\ q_{n+1} &= p_n + q_n \end{cases}$$

4. Déduire de la question précédente que pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{cases} p_{n+2} &= 2p_{n+1} + p_n \\ & \text{et} \\ q_{n+2} &= 2q_{n+1} + q_n \end{cases}$$

5. En déduire les expressions de entiers p_n et q_n en fonction de n.

Exercice II

On considère l'équation du second degré :

$$z^2 - bz + c = 0 \quad (1)$$

avec $(b, c) \in \mathbb{Z}^2$ et $b^2 - 4c < 0$, α étant une des racines de cette équation.
On note $\mathbb{Z}_\alpha$ l'ensemble des nombres complexes $z = p + q\alpha$ où $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$:

$$\mathbb{Z}_\alpha = \left\{ p + q\alpha \;\middle|\; (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

On note $\mathbb{Q}_\alpha$ l'ensemble des nombres complexes $w = v + u\alpha$ où $(u, v) \in \mathbb{Q}^2$:

$$\mathbb{Q}_\alpha = \left\{ u + v\alpha \;\middle|\; (u, v) \in \mathbb{Q}^2 \right\}.$$

1. Montrer que $(\mathbb{Z}_\alpha, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

2. Montrer que $z = p + q\alpha \in \mathbb{Z}_\alpha$ est nul si, et seulement si, $p = q = 0$.

3. Soit f l'application de $\mathbb{Z}_\alpha$ dans $\mathbb{Z}$ définie par :

$$\forall z = p + q\alpha \in \mathbb{Z}_\alpha, \quad f(z) = f(p + q\alpha) = p^2 + bpq + cq^2.$$

3*a*. Montrer que $\forall (z, z') \in \mathbb{Z}_\alpha^2$, $f(zz') = f(z)f(z')$.

3*b*. Montrer que $f(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

4. Soit G_α l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}_\alpha$ qui sont inversibles dans $\mathbb{Z}_\alpha$.

4*a*. Montrer que $(G_\alpha, \times)$ est un groupe.

4*b*. Montrer que $f(G_\alpha) = \{1\}$.

4*c*. Montrer que si $x = p + q\alpha \in G_\alpha$, alors $q^2(4c - b^2) \leqslant 4$.

4*d*. On suppose dans cette question $b = -1$ et $c = 1$. Déterminer explicitement G_α. Représenter les éléments de G_α dans le plan complexe.

5. Montrer que $(\mathbb{Q}_\alpha, +, .)$ est un sous-corps de $(\mathbb{C}, +, .)$.

6. Montrer que $\mathbb{Q}_\alpha$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace vectoriel $\mathbb{C}$, considéré comme espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Q}$.

Problème

Toutes les matrices considérées dans ce problème sont à coefficients réels. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre de celles d'entre elles qui sont carrées à n^2 éléments ($n \geqslant 1$) et, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on identifie A et l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qu'elle définit dans la base canonique de cet espace, ce qui autorise à considérer l'image $\operatorname{Im} A$ et le noyau $\operatorname{Ker} A$ de la matrice.
Pour tout exposant entier $d \geqslant 1$ on définit A^d par $A^d = AA^{d-1}$, avec $A^0 = I_n$, matrice unité de l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, c'est-à-dire appartenant au groupe linéaire de $GL_n(\mathbb{R})$, on note A^{-1} l'inverse de A.
On considère un groupe multiplicatif $\mathbf{G}$ non réduit à $\{0\}$, et contenu dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. *On souligne qu'en général* $\mathbf{G}$ *n'est pas un sous-groupe de* $GL_n(\mathbb{R})$ *et peut ainsi contenir des matrices de rang* $r < n$.
Cependant toute matrice $A \in \mathbf{G}$ admet, pour la multiplication des matrices, un inverse dans $\mathbf{G}$; on notera A' cet inverse. Autredit dit, il existe dans $\mathbf{G}$ un élément neutre E, éventuellement différent de I_n, et tel que, pour tout $A \in \mathbf{G}$, on ait $AE = EA = A$ et $AA' = A'A = E$.

1. Montrer que tous les éléments de $\mathbf{G}$ ont le même rang $r \geqslant 1$.

2. **2*a*.** Montrer que $\mathbb{R}^n$ est la somme directe de $\operatorname{Im} E$ et de $\operatorname{Ker} E$.

2*b*. Montrer que si $r < n$, alors E est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où I_r est la matrice unité de $\mathscr{M}_r(\mathbb{R})$. Que vaut E si $r = n$?

2*c*. En déduire que, si $r < n$, toute matrice $A \in \mathbf{G}$ est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $A_1 \in GL_r(\mathbb{R})$. Pour chaque entier $r \in [\![1, n]\!]$, caractériser les groupes $\mathbf{G}$ de matrices de rang r à l'aide des sous-groupes de $GL_r(\mathbb{R})$.

3. **3*a*.** Soit A une matrice non nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence des cinq propriétés suivantes :

(i) A appartient à un groupe multiplicatif $\mathbf{G}$.
(ii) A et A^2 ont le même rang.
(iii) A et A^2 ont la même image.
(iv) A et A^2 ont le même noyau.
(v) $\mathbb{R}^n$ est somme directe de $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{Ker} A$

3*b*. Donner, pour $n = 2$, un exemple de matrice non nulle n'appartenant à aucun sous-groupe multiplicatif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3*c*. Prouver que, pour que les cinq propriétés de **I.3.a** soient vérifiées par A, il faut et il suffit qu'il existe une matrice $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$AX = XA,\ X^2A = X \text{ et } A^2X = A.$$

3*d*. Établir que dans ce cas la matrice X est unique.

3*e*. Comparer X à A' et en déduire, avec les notations du **I.2.c** que A' est semblable à

$$\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où A_1^{-1} est l'inverse de A_1 dans $GL_r(\mathbb{R})$. Pour A fixé, A' dépend-il du groupe $\mathbf{G}$ auquel A appartient ?

4. **4*a*.** Soit $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $B_1 \in GL_r(\mathbb{R})$ et $r < n$. Montrer que B appartient à un groupe multiplicatif de matrices et que B' est de la forme $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où on calculera $C_1 \in GL_r(\mathbb{R})$ et C_2 en fonction de B_1 et B_2.

4*b*. Calculer A' pour $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

FIN DE L'ÉPREUVE