MP – CPGE Mohamed VI-Kénitra

Année scolaire 21/22

Devoir surveillé $n^\circ 3$

14/12/2021

Durée 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

• • • • • • • • • • •

NOTA : Soit E un espace vectoriel réel normé, on dira que E est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente dans E. Si x est un élément de E la norme de x est noté $\|x\|$. Soit A une partie de E et f une application de A dans elle-même f sera dite k-contractante, s'il existe un nombre réel $0 < k < 1$ tel que pour tout couple $(x.y)$ de points de A on ait

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|.$$

On dira qu'une partie A de E est fermée si pour toute suite $(x_n)_{n\in N}$ de A convergente dans E, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ est encore dans A. On dira que x est un point fixe de f si $f(x) = x$.

Partie : I

1. Soit E un espace vectoriel réel normé, A une partie de E et f une application de A dans elle même contractante. Soit $x_0 \in A$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

Montrer que $\|x_{n+1} - x_n \leqslant k^n \|x_1 - x_0\|$.

2. Montrer que si (r, s) est un couple d'entiers positifs tels que $r < s$ alors

$$\|x_s - x_r\| \leqslant \frac{k^r}{1-k}\|x_1 - x_0\|.$$

3. Montrer que si E est complet et si A est fermé la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est convergente dans A.

4. En déduire que si E est complet et A fermé l'application f de A dans elle même admet un point fixe et un seul.

5. Si E est complet et A fermé l'unique point fixe de f est appelé l. Montrer que si l'on remplace l par x_r on peut évaluer un majorant de l'erreur commise en fonction de k, x_1 et x_0.

6. En utilisant ce qui a été fait précédemment, montrer que la suite définie par :

$$U_o = 1, \quad U_n = 1 + \sqrt{U_{n-1}} \quad n \geqslant 1$$

est convergente. Calculer sa limite.

7. Soit une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$, f dérivable sur $]0,1[$ et telle que pour tout x de $]0,1[$ $|f'(x)| \leqslant k$ avec $0 < k < 1$. Montrer en utilisant ce qui a été fait précédemment qu'il existe un unique $l \in [0,1]$ tel que $f(l) = l$.

8. Interpréter géométriquement le résultat

9. Retrouver le résultat du **7.** en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction convenable.

Partie : II

E_a désigne l'espace vectoriel des fonctions continues à valeurs réelles sur l'intervalle $[0,a]$. Pour tout $f \in E_a$, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,a]} |f(x)|$, $\|f\|_1 = \int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x$ et $\|f\|_2 = \left(\int_0^a (f(x)^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$. On désigne par E_a^∞, E_a^1 et E_a^2 les espaces normés obtenus en munissant E_a des normes précédents. Pour tout $f \in E_a$, on pose :

$$T(f)(x) = \int_0^x t f^2(t)\mathrm{d}t + x, \quad \text{pour } \ x \in [0,a].$$

On admet que $\|.\|_\infty$, $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont des normes sur E_a.

1. Montrer qu'il existe deux constantes M et M' telles que

$$\|f\|_1 \leqslant M\|f\|_2 \leqslant M'\|f\|_\infty$$

pour tout $f \in E_a$.

2. On considère T comme application de E_a^∞ dans E_a^∞, est elle continue ?

3. On considère T comme application de E_a^2 dans E_a^∞, est elle continue ?

4. On considère T comme application de E_a^1 dans E_a^∞, est elle continue ?

5. On désigne par $E_{a,m}$ l'ensemble de f de E_a telles que $\|f\|_\infty \leqslant m$ où $m \in \mathbb{R}^{+*}$. On admettra que $E_{a,m}^\infty$ est complet.
Calculer en fonction de m la borne supérieure a_m des a tels que T applique $E_{a,m}$ dans lui-même et tels que T soit contractante.

6. Comment faut-il choisir m pour que a_m soit le plus grand possible.

7. Déduire de **II 6.** et **7.** que l'équation différentielle $y' = xy^2 + 1$ admet une solution unique y_o sur $\left[0, 2^{\frac{-1}{3}}\right]$ telle que $y_0(0) = 0$ et $\|y_0\|_\infty \leqslant 2^{\frac{2}{3}}$.

8. Soit y_1 une solution de l'équation différentielle précédente sur $[0,+\infty[$ telle que $y_1(0) = 0$. Montrer que pour tout a et b tels que $b > a > 0$, on a :

$$\left[\frac{1}{y_1(x)} + \frac{x^2}{2}\right]_b^a = \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{y_1^2(x)}.$$

9. En déduire que y_1 n'existe pas.

Partie : III

On considère $\mathbb{R}^n$ et l'application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie de la manière suivante :

$$\text{Si } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ et si } f(x) = (y_1, y_2, \dots, y_n),\ y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,\ 1 \leqslant i \leqslant n$$

1. Montrer que si $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ l'application f admet un point fixe et un seul. On pourra considérer $\mathbb{R}^n$ muni de la norme indice infini, c'est-à-dire $\|x\|_\infty = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$ et utiliser I.

2. (**pour** 5/2) Montrer que si $\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| < 1$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$ l'application f admet un point fixe et un seul. On pourra considérer $\mathbb{R}^n$ muni de la norme indice un, c'est-à-dire $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ et utiliser I.

3. Soit A la matrice $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et ${}^tA$ la matrice transposée de A. Montrer que ${}^tAA$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

4. Montrer que si toutes les valeurs propres de ${}^tA$ sont strictement inférieures à 1 alors f admet un point fixe et un seul.

Partie : IV

Dans cette partie $(E, \|.\|)$ désigne un espace vectoriel normé de dimension finie et u un endomorphisme de E. On suppose que

$$|||u||| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} < 1.$$

On se propose de montrer que l'endomorphisme $\mathrm{Id}_E - u$ est inversible. Pour tout $y \in E$, on définit l'application de E dans E définie par :

$$\forall x \in E,\ f_y(x) = y + u(x).$$

1. Montrer que $\mathrm{Id}_E - u$ est inversible si, et seulement si, pour tout $y \in E$, f_y admet un point fixe et un seul.

2. Vérifier que f_y est $|||u|||$-contractante. Conclure.

3. Soit $y \in E$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de $x_0 \in E$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = f_y(x_n)$.
Montrer que :

$$(\mathrm{Id}_E - u)^{-1}(y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u^k(y).$$

Puis conclure que $(\mathrm{Id}_E - u)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u^k = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$.

Fin de l'épreuve