

DEVOIR SURVEILLÉ n°4

01/02/2022
Durée 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

.....

Exercice I

On note

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

et T^+ le sous ensemble de T formé des matrices de coefficients diagonaux strictement positifs.

1. Soit $A \in T$. Déterminer les puissances de A . Calculer $\exp(A)$.
2. Montrer que l'application $\exp : T \rightarrow T^+$ est une bijection.

Exercice II

Soit a un nombre réel non nul, soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(t) = \frac{1}{t} e^{ia \ln(t)}$.

1. Montrer que la suite de terme général $z_n = e^{ia \ln(n)}$ est divergente. (on pourra utiliser un raisonnement par l'absurde, en considérant les sous-suites $(z_{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_{3^n})_{n \in \mathbb{N}}$.)
2. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\forall t \in [k, k+1]$,

$$|f(t) - f(k)| \leq \frac{M}{k^2} (t - k)$$

où $M = \sqrt{a^2 + 1}$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = f(n)$ et $v_n = \int_n^{n+1} f(t) dt$.

3a. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|v_n - u_n| \leq \frac{M}{2n^2}$.

3b. En déduire que les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ sont de même nature ? Ses sommes partielles sont-elles bornées ?

4. On admet le résultat suivant : Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série de nombres complexes dont les sommes partielles

$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ sont bornées, soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs décroissante et de limite nulle. Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n u_n$ converge.

Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{e^{ia \ln(n)}}{n \ln(n)}$?

Problème

L'objet de ce problème est l'étude de certaines fonctions définies sur des espaces de matrices. Dans tout le problème, on fixe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$) l'espace des matrices carrées à coefficients réels (respectivement complexes) de taille p . Si i et j sont deux entiers entre 1 et p , on note a_{ij} le coefficient placé ligne i et colonne j dans la matrice A . On rappelle que $A_0 = I_p$. On note $\text{Tr}(A)$ la trace de la matrice A .

1-Une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

1. Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, l'application $f_p : A \mapsto P(A)$ est une fonction continue de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
2. Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \text{Tr}(^tAB)$ est un produit scalaire sur l'espace $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
Dans toute la suite du problème, on note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.
3. Pour tous entiers i, j entre 1 et p et toute matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, comparer $|a_{ij}|$ et $\|A\|$.
4. Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2$,
$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$
5. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, comparer $\|A^n\|$ et $\|A\|^n$.

2-Séries de matrices

Dans cette partie, on se donne une série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes. On suppose que cette série converge absolument sur la boule ouverte $B(0, R)$ avec R strictement positif, éventuellement égal à $+\infty$.

1. Soit $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \mid \|A\| < R\}$. Montrer que l'application $\varphi : A \mapsto \varphi(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$ est définie et continue sur $\mathcal{B}$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $\|A\| < R$.
2a. Établir l'existence d'un entier $r \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille $(A^k)_{0 \leq k \leq r-1}$ soit libre et la famille $(A^k)_{0 \leq k \leq r}$ soit liée.

2b. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence et l'unicité d'un r -uplet $(\lambda_{0,n}, \dots, \lambda_{r-1,n})$ dans $\mathbb{R}^r$ tel que

$$A^n = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_{k,n} A^k.$$

2c. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{r-1} |\lambda_{k,n}| \leq C \|A^n\|.$$

2d. En déduire que, pour tout entier k entre 0 et $r-1$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \lambda_{k,n}$ est absolument convergente dans $\mathbb{C}$.

2e. Conclure qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(A) = P(A)$ et $\deg(P) < r$.

2f. Déterminer ce polynôme P lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et $a_n = \frac{1}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ pour qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $\varphi(A) = P(A)$.

3-Deux applications

A – Première application : une formule de trigonométrie matricielle

1. Rappeler l'énoncé du théorème permettant de faire le produit de deux séries de nombres complexes.

2. Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} B_n$ deux séries absolument convergentes de matrices, c'est-à-dire telles

$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\|$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|B_n\|$ convergent. Montrer que la série "produit de Cauchy" $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^n A_k B_{n-k} \right)$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n A_k B_{n-k} \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \right).$$

3. Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2$ tel que A et B commutent, montrer que $\exp(iA) \exp(iB) = \exp(i(A+B))$.

4. Pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on pose

$$\cos(A) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{A^{2n}}{(2n)!} \text{ et } \sin(A) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Montrer

$$\forall A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \cos(A)^2 + \sin(A)^2 = I_p.$$

B – Seconde application : le théorème de Cayley-Hamilton

On fixe une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

1. Pour R assez grand, montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $Re^{i\theta}I_p - A$ est inversible dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, et que son inverse est la matrice

$$(Re^{i\theta})^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (Re^{i\theta})^{-n} A^n.$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout R assez grand, la matrice

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^n (Re^{i\theta}I_p - A)^{-1} d\theta$$

vaut A^{n-1} .

3. On considère le polynôme caractéristique

$$\chi_A(X) = \det(XI_p - A) = \sum_{k=0}^p a_k X^k.$$

Montrer que pour R assez grand :

$$\chi_A(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta}) \chi_A(Re^{i\theta}) (Re^{i\theta}I_p - A)^{-1} d\theta.$$

4. En déduire que $\chi_A(A)$ est la matrice nulle. On pourra faire intervenir des comatrices.

FIN DE L'ÉPREUVE