Devoir surveillé $n^\circ 5$

10/03/2022

Durée 2 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

•••••••••••

-I-

1. Montrer que, quels que soient les nombres α et x réels, la série

$$1+\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{(n!)^2}x^n$$

converge. Dans toute la suite, on notera $f_\alpha(x)$ la somme de cette série.

2. ***2a.*** Préciser quelles sont les fonctions f_1, f_0, f_{-1} et f_{-2}.

2b. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, la fonction f_{-n} est polynomiale de degré n, et indiquer quel est son terme de plus haut degré.

3. Donner une valeur décimale approchée du nombre $f_{\frac{1}{2}}(-1)$ avec une erreur absolue inférieure à 2.10^{-3}.

-II-

1. α étant un nombre réel donné, on cherche une fonction $x \mapsto y(x)$ réelle de variable réelle, telle que $y(0)=1$, qui soit la somme d'une série entière de rayon de convergence infini :

$$y(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$$

et qui, pour tout x réel, vérifie l'équation différentielle :

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(1-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\alpha y=0.$$

Trouver la valeur de a_1 et, pour tout entier $k \geqslant 2$, la relation de récurrence entre a_{k-1} et a_k, condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi. En déduire que le problème a pour unique solution la fonction $y=f_\alpha(x)$ introduite au I.

2. Écrire une équation différentielle du deuxième ordre satisfaite par la fonction $x \mapsto e^x f_\alpha(-x)$. En admettant que la dite fonction somme d'une série entière de rayon de convergence infini, montrer que, quels que soient α et x réels, on a l'égalité :

$$f_{1-\alpha}(x) = e^x f_\alpha(-x).$$

3. Soit n un entier fixé $\geqslant 1$. Quand x tend vers $+\infty$, quelle est la limite de

$$\frac{f_{n+1}(x)}{x f_n(x)}?$$

-III-

1. Pour tout réel $x < 1$, calculer l'intégrale

$$G(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 - x\sin^2\theta}.$$

2. Pour tout x réel, on pose

$$\varphi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta.$$

N.B - On ne cherchera pas à calculer explicitement l'intégrale définissant $\varphi(x)$.

2*a*. Montrer que, pour tout u réel < 1, on a $e^u \leqslant \dfrac{1}{1-u}$.

2*b*. En utilisant cette inégalité sous l'intégrale définissant $\varphi(x)$, montrer que, pour tout x réel < 1, on a :

$$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

2*c*. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout x réel $\leqslant -1$, on ait

$$\varphi(x) \geqslant \frac{c}{\sqrt{-x}}.$$

3. **3*a*.** Pour tout entier $k \geqslant 0$, on pose

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}\theta\mathrm{d}\theta.$$

En intégrant par parties, trouver une relation entre I_k et I_{k+1}. En déduire la valeur des I_k.

3*b*. Sous l'intégrale définissant $\varphi(x)$ au III 2, remplacer $e^{x\sin^2\theta}$ par une série entière de la variable $x\sin\theta$, puis, en admettant qu'on peut permuter l'intégration et la sommation, montrer que, pour tout x réel, on a $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2} f_{\frac{1}{2}}(x)$.

3*c*. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f_{\frac{1}{2}}(x) = 0$. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f_{\frac{1}{2}}(x)\mathrm{d}x$ est-elle convergente ou divergente ?

4. Montrer que, si l'on attribue à l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$ la valeur 1, on commet une erreur absolue inférieure à 2.10^{-2}, mais que néanmoins 1 n'est pas la valeur exacte de cette intégrale.

-IV-

On note x, y, z les coordonnées cartésiennes dans l'espace $\mathbb{R}^3$, et l'on pose

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Comment choisir le nombre réel α pour que la fonction

$$F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{r}} f_\alpha(r)$$

vérifie, dans $\mathbb{R}^3$ privé de $0yz$, la relation :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 F}{\partial^2 z} - \frac{r}{x}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{4r^2} F = 0?$$

Fin de l'épreuve