Devoir surveillé $n^\circ 1$

27/09/2022

Durée 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Problème I

Un anneau $(B, +, .)$ est un anneau de Boole lorsque $\forall a \in B,\ a.a = a^2 = a$. Soit $(B, +, .)$ un anneau de Boole, l'élément neutre pour la loi $(+)$, noté 0 et l'élément neutre pour la loi $(.)$, noté 1.

I-Exemples

1. Vérifier que $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, .)$ est un anneau de Boole.

2. Soit E un ensemble non vide et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. On admet que $(\mathscr{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau.

2*a*. Préciser les éléments neutres pour Δ et $\cap$ (on rappelle que, pour $X, Y \in \mathscr{P}(E)$, $X\Delta Y = (X \cap \overline{Y}) \cup (\overline{X} \cap Y)$ où, si A est partie de E, $\overline{A} = E \setminus A$) et montrer qu'il s'agit d'un anneau de Boole.

2*b*. Cet anneau est-il intègre ? Discuter suivant le cardinal de E.

II-Étude d'un anneau de Boole

1. Montrer que

$$\forall (a, b) \in B^2,\quad [(a + b)^2 = a + b] \Leftrightarrow ab + ba = 0 \tag{1}$$

2. Déduire de (1) que

$$\forall a \in B,\quad a = -a \tag{2}$$

3. Montrer que $(B, +, .)$ est un anneau commutatif.

4. Montrer que $(B, +, .)$ ne peut pas se réduire à trois éléments.

5. On définit dans B la relation binaire $\mathscr{R}$ par :

$$\forall (a, b) \in B^2,\quad a\mathscr{R}b \Leftrightarrow ab = a.$$

5*a*. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre [1] dans B.

1. Une relation binaire $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre sur un ensemble E, si pour tout $x, y, z \in E$ on a :

5*b*. Montrer que, pour l'ordre ainsi défini, 0 est le plus petit élément et 1 le plus grand élément.

5*c*. Définir simplement la relation d'ordre binaire $\mathscr{R}$ dans $(\mathscr{P}(E), \Delta, \cap)$.

6. Établir que :

$$\forall (a,b) \in B^2, \quad ab(a+b) = 0.$$

7. On suppose que $(B, +, .)$ est intègre. Montrer que B est formé de deux éléments.

III-Anneau de Boole et théorie des ensembles

On désigne par E l'ensemble défini par :

$$E = \{\ m \in B \setminus \{0\} \mid \forall x \in B, \quad mx = 0 \ \text{ ou } mx = m\ \}.$$

1. Montrer que si m et m' sont deux éléments distincts de E, alors $mm' = 0$.

2. On définit l'application Φ par :

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & B & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ & x & \longmapsto & \Phi(x) \end{array}$$

où $\Phi(x) = \{\ m \in E \mid mx = m\ \}$.

2*a*. Montrer que, pour tout x et y de B, $\Phi(xy) = \Phi(x) \cap \Phi(y)$.

2*b*. Montrer que, pour tout x et y de B, $\Phi(x+y+xy) = \Phi(x) \cup \Phi(y)$.

2*c*. Montrer que pour tout $x \in B$, $\Phi(1+x) = \overline{\Phi(x)}$.

2*d*. Montrer que, pour tout x et y de B, $\Phi(x+y) = \Phi(x)\Delta\Phi(y)$.

2*e*. En déduire que Φ est un morphisme d'anneaux de $(B, +, .)$ dans $(\mathscr{P}(E), \Delta, \cap)$.

3. On suppose à présent que $(B, +, .)$ est un anneau de Boole de cardinal fini.

3*a*. Soit x_0 un élément non nul de B. Montrer que si $x_0 \notin E$, il existe $x_1 \in B$ tel que $x_0x_1 \neq 0$ et $x_0x_1 \neq x_0$.
En déduire l'existence d'un élément $y \in B$ tel que $x_0y \in E$.

3*b*. En déduire que le morphisme Φ est injectif.

3*c*. Soit F un sous-ensemble de E, et soit S_F la somme des éléments de F (avec par convention $S_\varnothing = 0$).
Déterminer la partie $\Phi(S_F)$. En déduire que le morphisme Φ est surjectif.

3*d*. Prouver que le cardinal d'un anneau booléen fini est une puissance de 2.

- $\mathscr{R}$ est réflexive si et seulement si $x\mathscr{R}x$.
- $\mathscr{R}$ est antisymétrique si et seulement si $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x \Rightarrow x = y$.
- $\mathscr{R}$ est transitive si et seulement si $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z \Rightarrow x\mathscr{R}z$.

Problème II

Dans ce problème, on cherche à décrire l'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel laissant invariants tous les vecteurs d'un hyperplan donné.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension d avec $d \geqslant 2$. On considère un hyperplan H de E (c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de E de dimension $d-1$) et u un endomorphisme de E tel que

$$u(h) = h, \text{ pour tout } h \in H,$$

c'est-à-dire laissant invariant tout élément de H.

Préliminaire

Soit a un vecteur de E qui n'appartient pas à H.

1. Montrer qu'il existe un unique réel γ et un unique $h_a \in H$ tels que

$$u(a) = \gamma a + h_a.$$

2. Montrer que le réel γ ne dépend pas du choix de $a \notin H$.

Partie I

On suppose dans cette partie que $\gamma \neq 1$.

1. **1*a*.** Montrer qu'il existe $a_1 \notin H$ tel que $u(a_1) = \gamma a_1$.

1*b*. Soit $(h_i)_{2 \leqslant i \leqslant d}$ une base de H. Justifier que $(a_1, h_2, \ldots, h_d)$ est une base de E et donner la matrice de u dans cette base.

1*c*. Montrer que $u(x) = \gamma x \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}a_1$. On notera E_γ la droite $\mathbb{R}a_1$.

2. Montrer que les seules droites vectorielles D (c'est-à-dire les seuls sous-espaces vectoriels de E de dimension 1) tels que $u(D) \subset D$ sont les droites contenues dans H ou la droite E_γ.

3. Soit V un sous-espace vectoriel de E.

3*a*. Montrer que si $E_\gamma \subset V$ ou $V \subset H$ alors $u(V) \subset V$.

3*b*. On suppose dans cette question que $E_\gamma \not\subset V$ et $V \not\subset H$ et l'on désigne par D une droite vectorielle telle que $D \subset V$ et $D \not\subset H$.

i) Soit $F = E_\gamma + D$. Vérifier que $u(F) \subset F$.

ii) Montrer que $u(V) \not\subset V$.

3*c*. Déduire des questions précédentes, une condition nécessaire et suffisante pour que $u(V) \subset V$.

Partie II

On suppose dans cette partie que $\gamma = 1$.

1. Montrer qu'il existe une application linéaire, notée f, de E dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = 0$ si et seulement si $x \in H$.

2. Montrer qu'il existe un unique vecteur $c \in H$ tel que $u(x) = x + f(x)c$ pour tout $x \in E$.

3. Montrer que u est bijective et calculer son inverse.

4. On suppose que u n'est pas l'application identité.

4*a*. Trouver les valeurs λ réelles et les vecteurs x de E tels que $u(x) = \lambda x$.

4*b*. En choisissant une base adéquate de E, donner une forme matricielle la plus simple possible de u.

4*c*. Donner une condition nécessaire et suffisante sur un sous-espace V de E pour que $u(V) \subset V$.

Fin de l'épreuve