MP – CPGE Mohammed VI-Kénitra
Année scolaire 22/23

Devoir surveillé $n^\circ 2$

15/11/2022
Durée 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice I : Soit

$$f : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto -5x^3 + 8x^2y - 3y + 17. \end{array}$$

On considère le problème d'optimisation :

$$(\mathscr{P}) \begin{cases} \min f(x,y) \\ x^4 + \left(x - \dfrac{y}{2}\right)^2 \leqslant 4 \\ y - x \leqslant 2 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Écrire le problème $(\mathscr{P})$ sous la forme $\min\limits_{(x,y)\in K} f(x,y)$, où K désigne un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$.

2. ***2a.*** Démontrer que K est non vide et que K est un borné de $\mathbb{R}^2$.

2b. Démontrer ensuite que K est fermé. En déduire que le problème $(\mathscr{P})$ possède (au moins) une solution.

Exercice II : $\mathscr{C}([0,2])$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[0,2]$. On peut normer cet espace par $\|.\|_1$ ou $\|.\|_\infty$ définies par :

$$\|.\|_1 : \begin{array}{ll} \mathscr{C}([0,2]) & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto \displaystyle\int_0^2 |f(t)|\mathrm{d}t \end{array}$$

et

$$\|.\|_\infty : \begin{array}{ll} \mathscr{C}([0,2]) & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f & \longmapsto \sup\limits_{t\in[0,2]} |f(t)| \end{array}$$

.

1. Soit $f \in \mathscr{C}([0,2])$. Justifier l'existence de $\|f\|_1$ et $\|f\|_\infty$ et montrer que $\|.\|_1$ est un norme sur E. Admettons que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E.

2. Démontrer que l'espace $(\mathscr{C}([0,2]), \|.\|_\infty)$ est complet.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur l'intervalle $[0,2]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right] \\ 1 + n(x-1) & \text{si } x \in \left[1 - \dfrac{1}{n}, 1\right] \\ 1 & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

3*a*. Représenter sur un même graphe les fonctions f_2, f_5 et f_{10}.

3*b*. Soient n et p, deux entiers tels que $n > p$. Démontrer que $\|f_n - f_p\|_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}\right)$.

3*c*. Soit f^* la fonction définie sur $[0,2]$ par :

$$f^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1] \\ \\ 1 & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\|f_n - f^*\|_1 = \dfrac{1}{2n}$.

3*d*. Déduire des questions précédentes que l'espace $(\mathscr{C}([0,2]), \|.\|_1)$ n'est pas complet.

Problème :

Préambule

Dans ce problème n est un entier naturel non nul, $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à éléments dans $\mathbb{C}$ corps des complexes.
$\mathscr{M}_1(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}$ sont identifies de façon habituelle. I_n désigne la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
M étant une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et φ un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, on note respectivement $\mathrm{sp}(M)$ et $\mathrm{sp}(\varphi)$ les ensembles de valeurs propres de M et φ, et $E_\lambda(M)$ (resp. $E_\lambda(\varphi)$) le sous-espace propre associé à une valeur propre λ de M (resp. φ). Enfin on désigne par f_M l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ qui admet pour matrice M dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, les vecteurs de $\mathbb{C}^n$ sont identifies aux matrices colonnes de leurs coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Partie I

1. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$.

1*a*. Soit λ une valeur propre de A, démontrer que : $f_B(E_\lambda(A))$ est inclus dans $E_\lambda(A)$.

1*b*. Démontrer qu'il existe un vecteur non nul de $\mathbb{C}^3$ qui est vecteur propre de f_A et f_B.

1*c*. Démontrer que si A a trois valeurs propres distinctes alors f_A et f_B se diagonalisent dans la même base de $\mathbb{C}^3$. Cette propriété est-elle vraie pour toute matrice A diagonalisable de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$?

CPGE Mohammed VI-Kénitra

2. On suppose, dans cette question, que A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$, quelconques. On considère l'équation :

$$AM = MB \tag{1}$$

où M est une matrice inconnue de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On appelle E l'ensemble des solutions de (1).
On définit de plus deux applications φ et ψ par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \quad \varphi(M) = AM \ \text{ et } \ \psi(M) = MB.$$

Puis $u(M) = \varphi(M) - \psi(M)$ définit une application u.

2*a*. Démontrer que φ, ψ et u sont des endomorphismes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Comparer $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$, $\mathrm{sp}(A)$ et $\mathrm{sp}(\varphi)$, $\mathrm{sp}(B)$ et $\mathrm{sp}(\psi)$.

2*b*. Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ et $X \neq 0$, $X \in E_\lambda(A)$, $\mu \in \mathrm{sp}({}^tB)$ et $Y \neq 0$, $Y \in E_\mu({}^tB)$.
Démontrer que la matrice $X{}^tY$ est un vecteur propre de u.

2*c*. Soit $\beta \in \mathrm{sp}(u)$ et $Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

i) Montrer que pour tout entier naturel k, $A^kY = Y(\beta I_n + B)^k$.

ii) En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)Y = YP(\beta I_n + B)$.

iii) On suppose que le polynôme caractéristique χ_A s'écrit

$$\chi_A = \prod_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}.$$

En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ et $\mu \in \mathrm{sp}(B)$ telles que $\beta = \lambda - \mu$.

2*d*. Démontrer l'équivalence : $\mathrm{sp}(A) \cap \mathrm{sp}(B) = \emptyset \Leftrightarrow u$ bijective.

2*e*. Dans cette question on prend $n = 3$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

i. Déterminer $\mathrm{sp}(A)$, $\mathrm{sp}(B)$ et $\mathrm{sp}(u)$.

ii. Déterminer E. E contient-il une matrice inversible ?

iii. Résoudre l'équation :

$$AM = MB + 3M \tag{2}$$

M inconnue.

iv. En déduire que u est diagonalisable.

3. On suppose que A et B diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et on désigne par $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ des bases respectives de vecteurs propres de A et ${}^tB$. En considérant la famille $(X_i{}^tY_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, montrer que u est diagonalisable.

4. Déterminer le nombre de des solutions de l'équation matricielle $M^2 = A$ où A est définie en **2. e)**, M matrice inconnue.

Partie II

On se propose de résoudre une équation matricielle. On donne

$$A = \begin{pmatrix} 12-2i & -6-2i & 6+2i \\ -6-2i & 3-5i & -3-i \\ 6+2i & -3-i & 3-5i \end{pmatrix}$$

et l'équation

$$M^3 = A \tag{3}$$

où M est une matrice inconnue.

1. Déterminer $\mathrm{sp}(A)$ et les vecteurs propres de A.

2. Soit $P = \begin{pmatrix} b & c & 2 \\ a+b & c+d & -1 \\ a-b & d-c & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une relation entre les paramètres complexes a, b, c, d pour que P soit inversible.
Dans ce cas calculer $P^{-1}AP$.

3. Démontrer que l'on peut exprimer les matrices M diagonalisables vérifiant (3) à l'aide d'une matrice P inversible, de P^{-1} et de j (j racine cubique non réelle de 1).

4. On suppose qu'il existe M non diagonalisable vérifiant (3).

4*a*. Démontrer que M est semblable à une matrice du type

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et h sont des complexes. Préciser h.

4*b*. On pose $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Étudier $\mathrm{sp}(B)$, calculer B^3, établir que :

$$(B - wI_2)(B - wjI_2)(B - wj^2I_2) = 0,$$

où w est un nombre complexe que l'on précisera.

4*c*. En étudiant le rang de $(B - wI_2)$, conclure quant à l'hypothèse envisagée dans cette question. Conclure quant aux solutions de (3).

FIN DE L'ÉPREUVE

CPGE MOHAMMED VI-KÉNITRA