Devoir surveillé $n^\circ 4$

03/01/2023

Durée 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

•••••••

Exercice : Soit $\lambda > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \frac{(-1)^n}{\lambda n + 1}.$$

1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est une série semi-convergente.

2. Vérifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n \int_0^1 t^{\lambda n}\mathrm{d}t$.

3. Montrer que la série de terme général u_n converge et que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\lambda}.$$

4. En déduire les valeurs des sommes :

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1},\ \ S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \text{ et } S_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Problème : Dans tout le sujet, p désigne un entier naturel non nul. Si $\mathbb{K}$ désigne un corps, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on adopte les notations suivantes.

- $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- I_p est la matrice identité de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.
- Une matrice $A \in M_p(\mathbb{K})$ est dite antisymétrique si ${}^tA = -A$.
- $\mathbf{GL}_p(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.
- On note Tr l'application trace et det l'application déterminant.
- $\mathbf{O}_p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales à coefficients dans $\mathbb{R}$ d'ordre p et $\mathbf{SO}_p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $\mathbf{O}_p(\mathbb{R})$ de déterminant 1.

- On munit $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par

$$\forall A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}),\ \|A\|_\infty = \sup_{1\leqslant i,j\leqslant p} |a_{ij}|$$

  et on munit $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ de la structure d'espace vectoriel normé associé.
- Si $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, on note u_A l'endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ canoniquement associé à la matrice A et, par abus de notation, $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(u_A)$.
- Si $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ on définit, lorsque cette limite existe, $E(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n$.

1 Question préliminaire.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le module et un argument de $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ en fonction de a, b et n.
2. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$.

2 Matrices antisymétriques réelles d'ordre 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Déterminer un nombre $\beta_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\frac{1}{\beta_n}\left(I_2 + \frac{1}{n}A\right) \in \mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$.
4. Déterminer un nombre réel θ_n tel que :

$$\frac{1}{\beta_n}\left(I_2 + \frac{1}{n}A\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}$$

5. En déduire que $E(A)$ existe et que c'est une matrice de rotation, dont on précisera l'angle.

3 Exponentielle de matrices diagonalisables.

Soit $D \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonale.

6. Montrer que $E(D)$ existe et que $E(D) \in \mathbf{GL}_p(\mathbb{K})$.
7. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(D) = E(D)$.
8. Soit $(\Delta, +)$ le sous-groupe additif de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ formé par les matrices diagonales. Montrer que E définit un morphisme de groupes de $(\Delta, +)$ dans $(\mathbf{GL}_p(\mathbb{K}), \times)$.

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable.

9. Montrer que $E(A)$ existe.
10. Montrer que $\det(E(A)) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.

11. Soit $x \in \mathbb{K}$. Montrer que $E(xI_p + A)$ existe et que :

$$E(xI_p + A) = e^x E(A)$$

Soient $A, B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ deux matrices diagonalisables. On suppose que A et B commutent.

12. Montrer qu'il existe $P \in \mathbf{GL}_p(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales. On étudiera les restrictions de u_B aux sous-espaces propres de u_A.
13. En déduire que $E(A+B)$ existe et que $E(A+B) = E(A)E(B) = E(B)E(A)$.

4 Exponentielle de matrices nilpotentes.

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$ (on dit que A est nilpotente d'indice k). Soit également $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.

14. **14*a*.** Montrer que, pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, $\mathrm{Ker}(A^{j-1})$ est inclus strictement dans $\mathrm{Ker}(A^j)$.

    14*b*. En déduire que $k \leqslant p$.
15. Montrer que $E(A)$ existe. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(A) = E(A)$.
16. Soit $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$. On suppose que A et B commutent et que $E(B)$ existe. On admet que, pour tout entier i compris entre 1 et p,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(I_p + \frac{1}{n}B\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \left(I_p + \frac{1}{n}B\right)^{n-i}$$

    Montrer que $E(A+B)$ existe et que $E(A+B) = E(A)E(B)$.
17. Soit $x \in \mathbb{C}$. Montrer que $E(xI_p + A)$ existe et que $E(xI_p + A) = e^x E(A)$.
18. Montrer que $E(A) - I_p$ est nilpotente.

5 Cas général.

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$P_n(X) = \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n \in \mathbb{C}[X]$$

et χ_A le polynôme caractéristique de A défini par

$$\chi_A(X) = \det(XI_p - A)$$

19. Montrer qu'il existe un unique couple $(Q_n, R_n) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ tel que

$$P_n = Q_n \chi_A + R_n$$

20. Montrer que $E(A)$ existe si et seulement si $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(A)$ existe.

21. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les racines de χ_A deux à deux distinctes, dont on note $n_1, \ldots, n_k$ les ordres de multiplicité respectifs.
Pour tout entier q compris entre 1 et p, on note J_q la matrice de $\mathscr{M}_q(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients son nuls sauf ceux situés juste au-dessus de la diagonale qui valent 1.
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{C}$, pour tout entier q compris entre 1 et p, la famille $\{(xI_q + J_q)^i,\ 0 \leqslant i \leqslant q-1\}$ est libre.
22. Soit $B = \mathrm{d}iag\left(\lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1}, \ldots, \lambda_k I_{n_k} + J_{n_k}\right)$ la matrice diagonale par blocs définie par

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} + J_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_k I_{n_k} + J_{n_k} \end{pmatrix}$$

Montrer que $\chi_B = \chi_A$.
23. Soit $i \geqslant 1$ un entier. Montrer que

$$B^i = \begin{pmatrix} (\lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1})^i & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (\lambda_2 I_{n_2} + J_{n_2})^i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & (\lambda_k I_{n_k} + J_{n_k})^i \end{pmatrix}$$

24. Soit P un polynôme annulateur non nul de la matrice B.
24*a*. Montrer que le degré de P est $\geqslant p$.
24*b*. En déduire que la famille $\{B^i,\ 0 \leqslant i \leqslant p-1\}$ est libre.
25. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n(B)$ existe.
26. En déduire que $E(A)$ existe.

Fin de l'épreuve