MP – CPGE Mohammed VI-Kénitra
Année scolaire 22/23

Devoir surveillé $n^\circ 5$

31/01/2023
Durée 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

• • • • • • •

Exercice : $\mathbf{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique $(.|.)$. $\mathscr{O}(\mathbf{R}^3)$ désigne l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de $\mathbf{R}^3$ et $SO(\mathbf{R}^3) = \left\{ f \in \mathscr{O}(\mathbf{R}^3) \;\middle|\; \det(f) = 1 \right\}$. Pour tout vecteur unitaire a de $\mathbf{R}^3$, on désigne par σ_a l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par :

$$\forall x \in \mathbf{R}^3, \quad \sigma_a(x) = 2(x|a)a - x.$$

1. **1*a*.** Montrer que σ_a est une symétrie vectorielle différente de $Id_{\mathbf{R}^3}$.

   1*b*. Déterminer $\mathrm{Ker}(\sigma_a - Id_{\mathbf{R}^3})$ et $\mathrm{Ker}(\sigma_a + Id_{\mathbf{R}^3})$.

   1*c*. En déduire que σ_a est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbf{R}a$.

   1*d*. Montrer que $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Vect}(a) \oplus \mathrm{Vect}(a)^\perp$. Déterminer la matrice de σ_a dans une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$, adaptée à cette décomposition. En déduire que $\sigma_a \in SO(\mathbf{R}^3)$.
2. Soit $r \in SO(\mathbf{R}^3)$ et a un vecteur unitaire de $\mathbf{R}^3$. Montrer que $r \circ \sigma_a \circ r^{-1} = \sigma_{r(a)}$.
3. Soit (u, v, w) une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$. Montrer que $\sigma_u \circ \sigma_v = \sigma_w$.

Problème : Dans tout le problème, on considère les notations suivantes :
• $\mathscr{C}_b(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.
• $\mathscr{C}_b^1(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que f et sa dérivée f' sont bornées. On munit cet espace de la norme N définie par $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.
• $\mathbf{e}$ la fonction constante sur $\mathbf{R}$ égale à 1.
• Pour une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on définit sous réserve d'existence le réel :

$$I_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}t$$

et la fonction Φ_f définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \Phi_f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} f(t) e^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}t$$

Le but de ce problème est d'étudier les propriétés du réel I_f et la fonction Φ_f pour les fonctions dans $\mathscr{C}_b(\mathbf{R})$ et $\mathscr{C}_b^1(\mathbf{R})$.

Partie I : Préliminaires

1. Calcul de $I_{\mathbf{e}}$.

Soit $\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$ et $\mathscr{F}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathscr{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(1+t^2)\frac{x^2}{2}}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que $\mathscr{F}$ est continue sur $\mathbf{R}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathscr{F}(x) = 0$.

(b) Montrer que $\mathscr{F}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x > 0$, $\mathscr{F}'(x) = -\alpha e^{\frac{-x^2}{2}}$. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathscr{F}(x) = -\alpha \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t + \frac{\pi}{2}.$$

(c) Déterminer la valeur de α et en déduire que $I_{\mathbf{e}} = 1$.

2. Exemples de I_f

(a) Justifier que l'intégrale I_f converge pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_b(\mathbf{R})$ et que $|I_f| \leqslant \|f\|_\infty$. En déduire que

$$\mathscr{H} = \left\{ f \in \mathscr{C}_b(\mathbf{R}) \,\middle|\, \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

est un hyperplan fermé de l'espace $\mathscr{C}_b(\mathbf{R})$.

(b) On considère la suite de fonctions $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f_0 = \mathbf{e}$ et $f_n(x) = x^{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que I_{f_n} est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et déterminer une relation entre I_{f_n} et $I_{f_{n+1}}$. En déduire que $I_{f_n} = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \cos(\pi x)$. En utilisant le développement en série entière de f ($\forall x \in \mathbf{R},\ \cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$), montrer que $I_f = e^{\frac{-\pi^2}{2}}$.

3. Étude de $I_{\mathbf{e}}$.

(a) Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbf{R}$. Montrer que f est bornée sur $\mathbf{R}^+$.

(b) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a $e^{\frac{-t^2}{2}} \underset{+\infty}{\sim} \Psi'(t)$ où $\Psi(t) = -\dfrac{e^{\frac{-t^2}{2}}}{t}$. En déduire que $\Phi_{\mathbf{e}}(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

(c) Justifier l'existence de deux constantes réelles M et M' telles que pour tout $x \in \mathbf{R}^+$

$$|\Phi_{\mathbf{e}}(x)| \leqslant M \text{ et } |x\Phi_{\mathbf{e}}\ (x) \leqslant M'|$$

Partie II : Un endomorphisme de $\mathscr{C}_b(\mathbf{R})$

4. Soit f une fonction de $\mathscr{C}_b(\mathbf{R})$.

(a) Montrer que Φ_f est bien définie et que pour tout $x \in \mathbf{R}^+$,

$$|\Phi_f(x)| \leqslant M\|f\|_\infty \text{ et } |x\Phi_f(x)| \leqslant M'\|f\|_\infty$$

(b) On suppose dans cette question seulement que $f \in \mathscr{H}$.
Soit $\widehat{f}$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\widehat{f}(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\Phi_f(-x) = -\Phi_{\widehat{f}}(x)$. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$|\Phi_f(x)| \leqslant M\|f\|_\infty \text{ et } |x\Phi_f(x)| \leqslant M'\|f\|_\infty$$

Dans la suite, on désigne par $T_f = \Phi_{f-I_f\mathbf{e}}$ pour tout $f \in \mathscr{C}_b(\mathbf{R})$, c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$x \longmapsto T_f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} (f(t) - I_f)e^{\frac{-t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

5. Montrer que $|T_f(x)| \leqslant 2M\|f\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et déduire que l'application $T : f \longmapsto T_f$ définit un endomorphisme continu de $\mathscr{C}_b(\mathbf{R})$.

6. Soit $f \in \mathscr{C}_b(\mathbf{R})$.

(a) Montrer que T_f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et que sa dérivée T_f' vérifie pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$T_f'(x) = xT_f(x) - f(x) + I_f.$$

(b) Résoudre, à l'aide de T_f, l'équation différentielle

$$y' = xy - f(x) + I_f.$$

7. Justifier que $|T_f'(x)| \leqslant 2(M'+1)\|f\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $f \in \mathscr{C}_b(\mathbf{R})$. Déduire que $T_f \in \mathscr{C}_b^1(\mathbf{R})$ pour tout $f \in \mathscr{C}_b(\mathbf{R})$.
L'endomorphisme T est-il surjectif ? Justifier la réponse.

Partie III : Étude spectrale de T

On se propose dans cette partie d'étudier l'endomorphisme T.

8. Montrer que 0 est une valeur propre de T et déterminer le sous-espace propre associé.

9. Montrer que toute valeur propre λ de T vérifie $|\lambda| \leqslant 2M$.

10. On fixe une fonction $h \in \mathscr{C}_b(\mathbf{R})$ et un réel λ vérifiant $|\lambda| \leqslant \dfrac{1}{2M+1}$. On se propose de montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathscr{C}_b(\mathbf{R})$ vérifiant l'équation intégrale suivante :

$$\forall x \in \mathbf{R},\quad h(x) = f(x) - \lambda e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} (f(t) - I_f)e^{\frac{-t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

On définit l'application S par $S(f) = h + \lambda T_f$, pour tout $f \in \mathscr{C}_b(\mathbf{R})$.

(a) Montrer qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que pour tous $f, g \in \mathscr{C}_b(\mathbf{R})$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |S(f)(x) - S(g)(x)| \leqslant k\|f - g\|_\infty.$$

On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $f_0 = 0$ et $f_{n+1} = S(f_n)$.

(b) Justifier que pour tout réel x et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a, $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant k^n\|h\|_\infty$. En déduire que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(f_{n+1} - f_n)$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$, on note f sa somme.

(c) Montrer que f vérifie l'équation (1).

Partie IV : Restriction de T à $\mathscr{C}_b^1(\mathbf{R})$.

11. Montrer que si $f \in \mathscr{C}_b^1(\mathbf{R})$ alors T_f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ et exprimer, pour tout réel x sa dérivée seconde $T_f''(x)$ en fonction de $xT_f'(x)$, $T_f(x)$ et $f'(x)$.

On admet dans la suite l'existence d'un réel C_1 et que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_b^1(\mathbf{R})$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |xT_f'(x)| \leqslant C_1 N(f).$$

12. Soit $C = \max(2M, 1) + C_1$. Justifier que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_b^1(\mathbf{R})$,

$$|T_f''(x)| \leqslant CN(f).$$

En déduire que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_n^2(\mathbf{R})$ et pour tous réels $x, y \in \mathbf{R}$ on a :

$$|T_f'(x) - T_f'(y)| \leqslant CN(f)|x - y|$$

et

$$|T_f(x) - T_f(y) - (x - y)T_f'(y)| \leqslant \frac{CN(f)}{2}(x - y)^2.$$

Partie VI : Application (pour 5/2)

Dans la suite $(\Omega, \mathscr{A}, p)$ désigne un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables mutuellement indépendantes suivant chacune la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p(X_n = -1) = p(X_n = 1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ et $M_n = \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

13. Déterminer l'espérance $E(M_n)$ et la variance de $V(M_n)$ de la variable aléatoire M_n. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $p(|M_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon^2}$.

14. Justifier que $S_n(\Omega) = \{\, 2k - n \mid k \in [\![0, n]\!] \,\}$ et que

$$p(S_n = 2k - n) = \frac{1}{2^n}\frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

15. Dans la suite, on se propose de démontrer que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_b^1(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to\infty} E(f(M_n)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

On fixe $f \in \mathscr{C}_b^1(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on définit la variable aléatoire $M_{n,i} = M_n - \dfrac{X_i}{\sqrt{n}}$.

16. En utilisant (0.4), montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\left| X_i T_f(M_n) - X_i T_f(M_{n,i}) - \frac{X_i^2}{\sqrt{n}} T_f'(M_{n,i}) \right| \leqslant \frac{CN(f)}{2n} |X_i|^3.$$

En déduire que

$$\left| E\left(X_i T_f(M_n)\right) - \frac{1}{\sqrt{n}} E\left(T_f'(M_{n,i})\right) \right| \leqslant \frac{CN(f)}{2n}.$$

17. Montrer alors que

$$\left| E\left(M_n T_f(M_n)\right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left(T_f'(M_{n,i})\right) \right| \leqslant \frac{CN(f)}{2\sqrt{n}}.$$

18. En utilisant l'inégalité (03), montrer de même que

$$\left| E\left(T_f'(M_n)\right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left(T_f'(M_{n,i})\right) \right| \leqslant \frac{CN(f)}{\sqrt{n}}.$$

19. En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} E(f(M_n)) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{\frac{-t^2}{2}} \mathrm{d}t$.

20. Établir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \cos\left(\pi \left(\frac{2\pi}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)\right) = e^{\frac{-\pi^2}{2}}.$$

Fin de l'épreuve