MP – CPGE Mohammed VI-Kénitra
Année scolaire 22/23

Devoir surveillé $n^\circ 6$

13/03/2023
Durée 2 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

•••••••

Problème 1 : La fonction Dilogarithme

Partie I - Propriétés

Pour tout réel $x \in [-1, 1[$, on considère l'intégrale

$$\mathbf{Li}(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t.$$

1. Justifier l'existence de cette intégrale pour tout réel $x \in [-1, 1[$.

2. On définit la fonction Dilogarithme

$$\mathbf{Li} : \begin{array}{ll} [-1,1[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \mathbf{Li}(x) \end{array}$$

Démontrer que la fonction **Li** est prolongeable par continuité en 1. On notera encore **Li** ce prolongement par continuité.

3. **3*a*.** Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$\mathbf{Li}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

3*b*. En déduire la valeur de $\mathbf{Li}(1)$.

4. **4*a*.** Pour $x \in]0, 1[$, calculer la dérivée de $\mathbf{Li}(x) + \mathbf{Li}(1-x)$

4*b*. Démontrer la relation fonctionnelle

$$\forall x \in]0,1[,\ \mathbf{Li}(x) + \mathbf{Li}(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(1-x)\ln(x)$$

5. Déduire de la question précédente, la valeur de la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2}.$$

6. ***6a.*** Pour tout réel $x \in]-1, 1[$, démontrer la relation

$$\mathbf{Li}(x) + \mathbf{Li}(-x) = \frac{1}{2}\mathbf{Li}(x^2)$$

6b. Retrouver la valeur de la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

7. ***7a.*** Pour tout réel $x \in]0, 1[$, démontrer la relation

$$\mathbf{Li}(x) - \mathbf{Li}(-x) + \mathbf{Li}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \mathbf{Li}\left(\frac{x-1}{1+x}\right) = \frac{\pi^2}{4} + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ln(x).$$

7b. En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2}.$$

8. On considère l'intégrale impropre $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\mathrm{d}x$. Montrer que J converge et calculer sa valeur. (*On peut utiliser le changement de variable* $t = 1 - e^{-x}$).

Partie II - Étude d'une équation différentielle

On se propose de résoudre dans $[-1, 1[$ l'équation différentielle :

$$xy'' + y' = \frac{1}{1-x} \tag{1}$$

où y est une fonction réelle de la variable x. On considère sur $[-1, 0[\cup]0, 1[$ l'équation différentielle :

$$xz' + z = \frac{1}{1-x} \tag{2}$$

où z est une fonction réelle de la variable x. K désigne un des deux intervalles $[-1, 0[$ ou $]0, 1[$.

9. ***9a.*** Donner la solution générale de l'équation homogène associée à (2) sur K.

9b. Démontrer que les solutions de (2) sur l'intervalle K sont les fonctions z de la forme :

$$x \mapsto z(x) = \varphi(x) + \frac{A}{x}$$

où $\varphi : x \mapsto \dfrac{-\ln(1-x)}{x}$ et A est une constante réelle.

10. En déduire que les solutions de (1) sur l'intervalle K sont les fonctions y de la forme :

$$x \mapsto y(x) = \mathbf{Li}(x) + A\ln|x| + B$$

où A et B sont des constantes réelles.

11. Soit y une solution éventuelle de l'équation (1) sur $[-1, 1[$.

11a. Déterminer l'expression explicite de y sur $[-1, 0[$ et sur $]0, 1[$.

11b. En exprimant la continuité et la dérivabilité de y en 0, déterminer les solutions éventuelles de (1) sur $[-1, 1[$.

11c. Vérifier que les fonctions ainsi déterminées conviennent.

Problème 2 : Les urnes de Pólya On considère une urne contenant au départ b boules blanches et r boules rouges ($(b,r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$). On tire une boule de l'urne et on la remet avec une autre boule de la même couleur, on a donc maintenant $r+b+1$ boules. On recommence un certain nombre de fois l'opération qui consiste à tirer une boule de l'urne et à la remettre avec une autre boule de la même couleur.
Le premier objectif de cet problème est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n-ème tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n-ème tirage dans un cas particulier.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n-ème tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n-ème tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Partie I-Préliminaires

1. Déterminer la loi de X_1.

2. Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'évènement $(X_1 = 1)$. En déduire la loi de X_2.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

Partie II-La loi de X_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour tout $k \in [\![b, n+b]\!]$, calculer $P(X_{n+1} = 1/S_n = k)$.

5. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier que :
$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{E(S_n)}{b+r+n}.$$

6. Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie III - La loi de S_n dans un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Exprimer l'évènement $(S_n = 1)$ avec les évènements $(X_k = 0)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

8. Montrer que $P(S_n = 1) = \dfrac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $P(S_n = n+1) = \dfrac{1}{n+1}$.

9. Soit $(k,l) \in [\![1, n+2]\!] \times [\![1, n+1]\!]$. Calculer la probabilité $P(S_{n+1} = k/S_n = l)$ dans chacun des trois cas suivants :

$$\text{(i) } l \notin \{k-1, k\}, \quad \text{(ii) } l = k-1, \quad \text{(iii) } l = k.$$

10. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, on a la relation :

$$P(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k).$$

11. Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

Fin de l'épreuve