Année scolaire 23/24

Devoir surveillé $n^\circ 1$

26/09/2023

Durée 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice I

On considère dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble suivant :

$$G = \left\{ M = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. Montrer que G est stable dans $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

2. Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbf{GL}_3(\mathbb{R}), \times)$.

3. Déterminer l'ensemble C défini par :

$$C = \{ A \in G \mid \forall M \in G, \quad AM = MA \}.$$

Exercice II

On rappelle que le groupe spécial linéaire $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ est le groupe des matrices réelles 2×2 de déterminant 1 : $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \middle| ad - bc = 1 \right\}$. Soit $\mathbf{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$. Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$, on considère l'application φ_M définie par :

$$\varphi_M : \begin{array}{ccc} \mathbf{H} & \longrightarrow & \mathbf{H} \\ z & \longmapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

Une telle application s'appelle une homographie.
On note G l'ensemble des homographies, i.e.

$$G = \{ \varphi_M \mid M \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) \}.$$

1. Soit $M \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$. Montrer que l'application φ_M est bien définie et vérifie $\varphi_{MN} = \varphi_M \circ \varphi_N$ pour tous $M, N \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$.

2. En déduire que G est un groupe pour la composition $\circ$, que $M \mapsto \varphi_M$ est un morphisme de groupe. Montrer que φ_M est bijective et donner une expression de sa réciproque.

3. Montrer que G est engendrée par les fonctions de la forme

$$z \mapsto -\frac{1}{z},\ z \mapsto z + t,\ z \mapsto kz$$

où $t \in \mathbb{R}$ et $k > 0$.

4. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $r_\theta = \varphi_{R_\theta}$. Montrer que l'application $\chi : \mathbb{R} \to G$ donnée par $\theta \mapsto r_\theta$ est un morphisme de groupes. Déterminer son noyau.

Problème

On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note D l'application définie sur E, et à valeurs dans E, qui à toute fonction f de E associe $D(f) = f'$, sa dérivée, ainsi que Id l'identité de E, vérifiant $Id(f) = f$ pour toute application f de E.
Dans la suite du problème α désigne un réel non nul et on note F_α, l'ensemble des fonctions de E de la forme

$$x \longmapsto P(x)e^{\alpha x} + Q(x)e^{-\alpha x}$$

où P et Q sont des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 1. On note id_α, l'application identique sur F_α.

1. ***1a.*** Montrer que F_α est un sous-espace vectoriel de E.

1b. On considère les fonctions suivantes :

$$f_1 : x \longmapsto e^{\alpha x},\quad f_2 : x \longmapsto xe^{\alpha x},\quad f_3 : x \longmapsto e^{-\alpha x},\quad f_4 : x \longmapsto xe^{-\alpha x}.$$

Montrer que la famille $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de F_α.
On note D_α, la restriction de D à F_α, c'est a dire l'application définie sur F_α, qui à toute fonction f de F_α associe $D_\alpha(f) = f'$, sa dérivée.

2. ***2a.*** Montrer que D est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau et son image.

2b. Montrer que D_α, est un endomorphisme de F_α.

2c. Déterminer M_α, la matrice de D_α, dans la base $\mathscr{B}$.

2d. Montrer que la matrice M_α est inversible.

3. Soit λ un réel. Déterminer en fonction de λ le rang de l'endomorphisme $D_\alpha^2 - \lambda id_\alpha$.

4. ***4a.*** Déterminer une base du noyau de $D_\alpha^2 - \alpha^2 id_\alpha$ et une base de l'image de $D_\alpha^2 - \alpha^2 id_\alpha$.

4b. Déduire de **4.**(a) que pour tout f de F_α, on a l'égalité :

$$(D_\alpha^2 - \alpha^2 id_\alpha)^2(f) = 0.$$

4c. Montrer que $D_\alpha^4 - 2\alpha^2 D_\alpha + \alpha^4 id_\alpha = 0$ et en déduire D_α^{-1}.

5. ***5a.*** On se place désormais dans E. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y''(x) - \alpha^2 y(x) = 0.$$

5*b*. Déterminer le noyau de $D^2 - \alpha^2 Id$.

5*c*. Montrer que pour toute application f, appartenant au noyau de $(D^2 - \alpha^2 Id)^2$, il existe un couple de réels, (λ_1, λ_3), tel que $(D^2 - \alpha^2 Id)(f) = \lambda_l f_l + \lambda_3 f_3$, puis que l'application

$$g = f - \frac{\lambda_1}{2\alpha} f_2 + \frac{\lambda_3}{2\alpha} f_4$$

appartient au noyau de $D^2 - \alpha^2 Id$. En déduire le noyau de $(D^2 - \alpha^2 Id)^2$.

6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y^{(4)}(x) - 2\alpha^2 y''(x) + \alpha^4 y(x) = 0.$$

où l'on note $y^{(4)}$ la dérivée quatrième de la fonction $x \longmapsto y(x)$.

7. Soit $\mathscr{E}$ l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y^{(4)}(x) - 2y''(x) + y(x) = x^3 - 12x + 2.$$

7*a*. Montrer que $\mathscr{E}$ possède une solution polynômiale et la déterminer. On notera par la suite f_0, cette solution polynômiale.

7*b*. Soit f une solution de $\mathscr{E}$; montrer que $f - f_0$ est un élément du noyau de $(D^2 - Id)^2$ et en déduire l'ensemble des solutions de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$.

Fin de l'épreuve