Devoir surveillé $n^\circ 2$

30/10/2023

Durée 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice I

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, les normes sur E et F sont notées $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$. On supposera que E est de dimension finie n. $\mathscr{L}(E,F)$ désigne l'espace des applications linéaires de E dans F. S désigne la sphère unité définie par : $S = \{ x \in E \mid \|x\|_E = 1 \}$. On rappelle que la normé subordonnée de $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est définie par :

$$|||f||| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Partie I : La norme subordonnée est atteinte

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$

1. Soit $M > 0$ un réel tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant M\|x\|_E$. On suppose qu'il existe un vecteur $x_0 \in S$ tel que $\|f(x_0)\| = k$. Démontrer que $M = |||f|||$.

2. **2*a*.** Rappeler la définition d'une partie compacte de E. Pourquoi peut on affirmer que S est compacte ?

2*b*. Démontrer que l'application $x \mapsto \|f(x)\|_F$ est continue sur S. En déduire qu'il existe un vecteur $x_0 \in S$ tel que $\|f(x_0)\| = |||f|||$.

Partie II : Cas d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

$E = \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ admet pour matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$.

1. Déterminer $f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Déterminer la norme subordonnée de f lorsque $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $\|.\|_\infty$, et préciser un vecteur x_0 tel que $|||f||| = \dfrac{\|f(x_0)\|_\infty}{\|x_0\|_\infty}$.

3. Même question lorsque $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $\|.\|_1$, et préciser un vecteur x_0 tel que $|||f||| = \dfrac{\|f(x_0)\|_1}{\|x_0\|_1}$.

4. On munit E de la norme $\|.\|_2$. On considère le vecteur $x = (\cos\theta, \sin\theta)$.

4*a*. Démontrer que $x \in S$.

4*b*. Démontrer qu'il existe α, β réels tels que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \|f(x)\|_2 = \sqrt{\alpha\cos(2\theta) + \beta\sin(2\theta)}$.

4*c*. En déduire la valeur de $|||f|||$, et préciser un vecteur $x_0 \in S$ tel que $|||f||| = \dfrac{\|f(x_0)\|_2}{\|x_0\|_2}$.

Exercice II

Notons par E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à coefficients réels, qu'on munit de la norme $\|P\| = \sup_{0\leqslant k\leqslant d} |a_k|$ où $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$.
Pour $c \in \mathbb{R}$, on définit la forme linéaire sur E et la forme bilinéaire sur $E\times E$ muni de la norme produit, par :

$$l_c : \begin{array}{ll} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ P & \longmapsto P(c) \end{array}$$

et

$$b_c : \begin{array}{ll} E\times E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto b_c(P,Q) = P(c)Q(c) \end{array}$$

1. Vérifier que $\|.\|$ est une norme sur E.

2. Montrer que l_c est continue si, et seulement si, $|c| < 1$.

3. Montrer que si $|c| < 1$, alors b_c est continue et calculer sa norme $|||b_c||| = \sup_{(P,Q)\neq(0,0)} \dfrac{|b_c(P,Q)|}{\|P\|\|Q\|}$.

Indication : Pour $c \in [0,1[$, considérer le polynôme $P_n = 1 + X + \ldots + X^n$ et pour $c \in]-1,0[$, considérer le polynôme $Q_n = 1 - X + X^2 \ldots + (-1)^n X^n$.

Exercice III

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieure ou égal à $n \in \mathbb{N}$ et A la partie de $\mathbb{R}^{n+1}$ constituée des éléments $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ tels que $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$. Si $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in A$, on munit E de la norme N_a défini par :

$$\forall P \in E, \quad \|P\|_a = \max_{0\leqslant i\leqslant n} |P(a_i)|.$$

On note E_a l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|_a)$.
Soient $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ et $b = (b_0, b_1, \ldots, b_n)$ deux éléments de A. On considère l'application linéaire

$$I : \begin{array}{ll} E_a & \longrightarrow E_b \\ P & \longmapsto P \end{array}$$

1. Montrer que l'application I est continue.

2. Calculer $P(b_j)$ en fonction des $P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)$. En déduire $|||I||| = \sup_{P\neq 0} \dfrac{\|P\|_b}{\|P\_a}$. (Indication : utiliser les polynômes des Lagrange $(l_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ qui sont définis par $l_j = \prod_{i\neq j} \left(\dfrac{X - a_i}{a_j - a_i}\right)$).

3. **Application :** On pose $a_i = i$ et $b_i = -1 - i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

3*a*. Simplifier l'expression de I. Calculer I si $n = 2$.

3*b*. Donner un équivalent simple de I lorsque n tend vers $+\infty$.

Fin de l'épreuve