MP – CPGE Mohammed VI-Kénitra
Année scolaire 23/24

Devoir surveillé $n^\circ 3$

18/1/2023
Durée 2 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice I

Soit $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) - E(x)$$

1. Montrer que f est 1-périodique.

2. En déduire que, $\forall x \in \mathbf{R}$, $E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) = E(x)$.

3. Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$u_n(x) = E\left(\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right).$$

Montrer que la série de fonction $\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$ et calculer sa somme.

Exercice II

1. a et b étant deux réels tels que $a < b$, soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$. On pose, λ étant un réel :

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\mathrm{d}x, \ J(\lambda) = \int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\mathrm{d}x.$$

Montrer que $I(\lambda)$ et $J(\lambda)$ ont une limite nulle lorsque λ tend vers $+\infty$.

2. Déterminer deux réels fixes u, v tels que, quel que soit l'entier strictement positif n, on ait l'égalité :

$$\frac{1}{n^2} = \int_0^\pi (ux + vx)\cos(nx)\mathrm{d}x.$$

3. On pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}.$$

À l'aide de la question précédente, exprimer S_n sous forme d'intégrale.

Calculer (par exemple en utilisant l'exponentielle complexe) une expression simple de :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx).$$

En introduisant une fonction f convenablement choisie, et appliquant le résultat de la question **1)**, déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Les candidats sont invités à vérifier très soigneusement que la fonction f introduite est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

4. ***4a.*** Déterminer tous les entiers strictement positifs n possédant la propriété suivante :

$$(P_2) \qquad \text{« } E\left(\sqrt{n}\right) \text{ divise } n \text{ »}$$

Il sera commode de poser $E\left(\sqrt{n}\right) = k$ ($E(x)$ désigne la partie entière de x).

On appelle I l'ensemble des entiers ayant la propriété (P_2).

4b. Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in I}$ est sommable. Calculer sa somme (le résultat s'exprime simplement à l'aide de π).

Exercice III

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur $[0,1]$ définie par :

$$f_n : x \in [0,1] \mapsto (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{1-n+n^2}}$$

1. Montrer que la série de terme général f_n converge simplement sur $[0,1]$ et que sa somme F est continue sur $[0,1[$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x$ et montrer que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x$ converge.

2. Montrer que

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{1-n+n^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt{1-n+n^2}}$$

3. Montrer que la série de terme général $|f_n(1)|$ ne converge pas. Montrer que la série de terme général $|f_n|$ converge uniformément sur tout segment de $[0,1[$. Montrer, en utilisant cette convergence uniforme, que :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{1-n+n^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-n+n^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{1-n+n^2}}$$

Exercice IV

1. Soient n un entier strictement supérieur à 1 et $a \in]0,+\infty[$. Montrer que la fonction J_n définie sur $I = [a,+\infty[$ par

$$J_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\sin t}{(t^2+x^2)^n}\mathrm{d}t$$

est continue sur I.

2. La fonction J_1 définie sur I par

$$J_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{t^2 + x^2} \mathrm{d}t$$

est-elle continue sur I ?

3. Montrer que si $n \geqslant 1$, la fonction J_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et vérifie la formule

$$\frac{\mathrm{d}J_n}{\mathrm{d}x}(x) = -2nxJ_{n+1}(x).$$

4. (Facultatif) À l'aide d'intégration par parties, établir pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \in]0, +\infty[$ la relation

$$J_n(x) + 2n(2n-1)J_{n+1}(x) - 4x^2 n(n+1)J_{n+2}(x) = 0$$

et vérifier que J_n est solution de l'équation différentielle

$$xy'' + 2(n-1)y' - xy = 0.$$

Fin de l'épreuve