Devoir surveillé $n^\circ 4$

01/03/2024
Durée 2 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Problème I

I

Pour n entier naturel supérieur ou égal à 2, on considère la série entière de terme général

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n(n-1)}.$$

On notera f sa somme quand elle converge.

1. **1*a*.** Déterminer le rayon de convergence R.
   1*b*. La série converge-t-elle pour $x = R$? pour $x = -R$?
2. Montrer que f est continue sur $[-R, R]$, deux fois dérivable sur $]-R, R[$.
3. Calculer $f''(x)$ et en déduire $f(x)$.
4. Calculer $S_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ et $S_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

II

Pour n entier naturel, on considère la série entière de terme général

$$u_n(x) = \frac{x^n}{4n-1}.$$

On notera f sa somme quand elle converge.

1. **1*a*.** Déterminer le rayon de convergence R.
   1*b*. La série converge-t-elle pour $x = R$? pour $x = -R$?
2. Pour x élément de $]0, R[$, on pose $x = t^4$ et

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{4n-1}}{4n-1}.$$

2*a*. Étudier la dérivabilité de g et montrer que, lorsque g est dérivable, $g'(t) = \dfrac{at^2+b}{1-t^4}$, où a et b sont deux constantes que l'on déterminera

2*b*. Calculer $g(t)$.

2*c*. En déduire $f(x)$ pour x élément de $]0, R[$.

3. Par une méthode analogue celle du **2.**, déterminer $f(x)$ pour x éliment de $]-R, 0[$.

4. **4*a*.** Étudier la continuité de f sur $[-R, R[$.

4*b*. Calculer $S_3 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n-1}$.

Problème II

Partie I

NOTE : Dans tout le problème, on posera $0^0 = 1$.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance et une variance.
Soit $k \in \mathbb{N}$. On note p_k la probabilité de l'événement $(X = k)$.

1. Soit s un réel appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$. Montrer que la série de terme général $u_k = p_k s^k$ est absolument convergente.

2. A la variable aléatoire X on associe, une fonction g définie sur $[-1, +1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. C'est la fonction génératrice de X définie par :

$$\forall s \in [-1, 1], \quad g : s \mapsto g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k.$$

2*a*. Montrer que $g(0) = p_0$ et $g(1) = 1$.

2*b*. Soit X une variable aléatoire de Bernoulli (c'est-à-dire une loi définie par $p(x = 1) = p$, $p(X = 0) = 1 - p$). Calculer sa fonction génératrice.

2*c*. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ. Calculer sa fonction génératrice.

3. Soit $s \in [-1, 1]$. Montrer que la série de terme général $v_k = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(p_k s^k)$ et la série de terme général $w_k = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}(p_k s^k)$ sont absolument convergentes.

(on note respectivement $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(p_k s^k)$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}(p_k s^k)$ les dérivées première et seconde par rapport à s de la fonction $s \mapsto p_k s^k$).

4. On admettra que g est deux fois dérivable sur $[-1, 1]$ et que ses dérivées première et seconde sont respectivement :

$$g'(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(p_k s^k) \text{ et } g''(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}(p_k s^k)$$

Montrer que $E(X) = g'(1)$. En déduire l'expression de la variance de X en fonction de $g'(1)$ et $g''(1)$. Utiliser ces résultats pour calculer l'espérance et la variance des variables aléatoires de loi de Bernouilli et de loi de Poisson.

5. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $Z = X + Y$. On note respectivement f, g et h les fonctions génératrices de X, Y et Z.
En écrivant que :
$$p(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} p(X=i, Y=k-i)$$
montrer que $h = g.f$ (c'est-à-dire : $\forall s \in [-1,1], h(s) = f(s) \times g(s)$).
Ce résultat pourra être utilisé par la suite, même s'il n'est pas démonté.

6. Soient $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, n variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes, de même loi. On note Z_n, la variable aléatoire définie par $Z_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$.
Montrer que $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, ont même fonction génératrice. On la notera g.
Exprimer en fonction de g la fonction génératrice de Z_n. Déduire de ce qui précède l'expression de la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.

Partie II

Dans une population, on s'intéresse aux générations successives d'individus présentant une certaine caractéristique transmise héréditairement.
Soit X_i ($i \in \mathbb{N}$) la variable aléatoire représentant le nombre d'individus de la i-ème génération, et soir ξ_k la variable aléatoire représentant le nombre de descendants du k-ème individu de cette génération. On suppose que la loi de ξ_k ne dépend ni de l'individu k, ni de la génération i considérée. On remarquera que, si $X_n = j$, alors $X_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{j} \xi_k$ et que, par conséquent, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant que $X_n = j$ est la loi de la somme de j variables aléatoires indépendantes équidistribuées $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_j$. Dans toute la suite on supposera que $X_0 = 1$.

1. On note g la fonction génératrice des variables aléatoires ξ_i ($i \in \mathbb{N}$). Montrer que : $\forall s, s \in [-1,+1]$ on a $g(s) \in [-1,+1]$. On note $g^{(2)}, g^{(3)}, ..., g^{(n)}$, les fonctions composées successives de la fonction g, définies par :
$$g^{(2)} = g \circ g, \;\; g^{(3)} = g \circ g^{(2)}, ..., g^{(n)} = g \circ g^{(n-1)}.$$

1*a*. Soit g_1 la fonction génératrice de X_1. Montrer que $g_1 = g$.

1*b*. Soit g_n la fonction génératrice de X_n. Montrer par récurrence que $g_n = g^{(n)}$.

2. On pose $m = E(\xi_i) = E(X_1)$ espérance des ξ_i et $\sigma^2 = V(\xi_i) = V(X_1)$ variance des ξ_i.
Montrer que $E(X_n) = m^n$ et que $V(X_n) = \sigma^2 m^{n-1}(1+m+...+m^{n-1})$. Comment varie $V(X_n)$ en fonction de n ?

Fin de l'épreuve