MP – CPGE Mohammed VI-Kénitra

Année scolaire 24/25

Devoir surveillé $n^\circ 2$

29/10/2024

Durée 2 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice

Commutant. Endomorphisme cyclique

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. On appelle commutant de f l'ensemble

$$\mathscr{C}(f) = \{ g \in \mathscr{L}(E) \mid fg = gf \} .$$

1. Montrer que $\mathscr{C}(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ stable par produit (c'est-à-dire si $g, h \in \mathscr{C}(f)$ alors $gh \in \mathscr{C}(f)$).
2. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ on a : $P(f) \in \mathscr{C}(f)$.
   On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E.
3. Montrer que s'il existe $x_o \in E$ tel que $f^n(x_o) = 0$ et $f^{n-1}(x_o) \neq 0$, alors f est cyclique.
4. Montrer que si f est un endomorphisme cyclique alors :

$$\mathscr{C}(f) = \{ g \in \mathscr{L}(E) \mid \exists P \in \mathbb{K}|X] \text{ tel que } g = P(f) \} .$$

Problème

Le plan affine P est rapporté nu repère orthonormé cartésien $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Le nombre λ étant un réel donné, on considère l'application f_λ, qui au point M de coordonnées (x, y), fait correspondre la point M' de coordonnées (x', y') telles que :

$$\begin{cases} x' &= x + (\lambda - 1)y \\ y' &= 2x + (\lambda - 2)y \end{cases}$$

Partie A

1. Déterminer les valeurs de λ, pour lesquelles f_λ est bijective.
2. Déterminer lorsqu'elle existe f_λ^{-1}, l'application réciproque de f, en donnant les coordonnées de M en fonction de celles de M'.
3. Existe-t-il des valeurs de λ pour lesquelles f_λ est involutive ?
4. Quelle est la nature géométrique de f_1 ?

Partie B

Dans cette question on étudie f_0.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants de f_0.
2. Montrer que l'image par f_0 du plan P est une droite (Δ) globalement invariante par f_o dont on donnera une équation cartésienne.
3. Montrer qu'il existe une constante réelle non nulle k telle que pour tout point M de (Δ), d'image M' par f_o on ait :
$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}.$$
4. Montrer que f_0 est la composée d'une projection p et d'une homothétie h que l'on déterminera en donnant leurs expressions analytiques respectives et en précisant leurs éléments caractéristiques.

Partie C

On suppose que $\lambda \neq 0$ et on pose $f_\lambda^2 = f_\lambda \circ f_\lambda$ et pour tout entier n supérieur à 2, $f_\lambda^n = f_\lambda \circ f_\lambda^{n-1}$.
On considère la droite (D_λ) d'équation $y = x + k$.

1. **1*a*.** Montrer que l'image de la droite (D_λ) par f_λ est la droite (D'_λ) d'équation $y = x - k$.

   1*b*. En déduire l'image de la droite (D_λ) par f_λ^n suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.
2. Soit A_0 le point de coordonnées $(1, 0)$. On pose $A_1 = f_\lambda(A_0)$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $A_n = f_\lambda^n(A_0)$.

   2*a*. Montrer, par récurrence, que les coordonnées (x_n, y_n) de A, sont pour tout entier naturel non nul de la forme
$$\begin{cases} x_n &= 2u_n(\lambda) + (-1)^n \\ y_n &= 2u_n(\lambda) \end{cases}$$
   où $u_n(\lambda)$ est un polynôme en λ, de degré $n - 1$.

   2*b*. Préciser la relation qui existe entre $u_n(\lambda)$ et $u_{n+1}(\lambda)$.

   2*c*. En déduire que si, $\lambda \neq -1$, alors :
$$u_n(\lambda) = \frac{\lambda^n - (-1)^n}{\lambda + 1}.$$

   2*d*. On suppose que $\lambda = -1$. Calculer $u_1(\lambda), u_2(\lambda)$ et $u_3(\lambda)$.
   Exprimer $u_n(\lambda)$ en fonction de n.

Fin de l'épreuve