MP – CPGE Mohammed VI-Kénitra

Année scolaire 24/25

Devoir surveillé $n^\circ 3$

26/11/2024

Durée 2 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice : 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est f.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A divise tous les polynômes annulateurs de A.

2. Montrer que $R[A] = \{ P(A) \mid P \in \mathbb{R}[X] \}$ est de dimension finie et en trouver une base explicite.

3. Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est de dimension supérieure ou égale à 3.

4. Soit $U = {}^t(a, b, c)$ un élément non nul de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On considère l'hyperplan

$$H_U = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ax + by + cz = 0 \right\}.$$

Montrer que H_U est stable par f si, et seulement si, U est un vecteur propre de ${}^tA$.

5. Trouver explicitement les plans stables par f.

6. Trouver les projecteurs π de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec f.

Exercice : 2

Vous devez répondre à cet exercice directement sur la feuille. Chaque bonne réponse donnera 1 point, chaque mauvaise en fera perdre 1. Merci d'écrire votre nom sur cette feuille également.
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On notera $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de u, $E_{\lambda_1}(u), E_{\lambda_2}(u), \ldots, E_{\lambda_p}(u)$ les espaces propres associés et $n = \dim_{\mathbb{K}}(E)$.

N°	Questions	Vrai	Faux
1	u diagonalisable $\Leftrightarrow E = E_{\lambda_1}(u) \oplus E_{\lambda_2}(u) \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}(u)$		
2	u diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe une base de E formée de vecteurs propres.		
3	u diagonalisable $\Leftrightarrow p = n$		
4	u diagonalisable $\Leftrightarrow \chi_u$ est scindé à racines simples		
5	u diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples.		
6	χ_u non scindé $\Leftrightarrow u$ non diagonalisable.		
7	Un polynôme annulateur de u a toujours les $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ pour racines mais peut en avoir d'autres.		
8	u nilpotent $\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$.		
9	Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.		
10	Seules les homothéties ont un polynôme annulateur de degré 1.		
11	Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il suffit de vérifier que $\dim(E_{\lambda_i}) = \text{mult}(\lambda_i)$ pour tout i de $\{1, 2, \ldots, p\}$ pour montrer que u est diagonalisable.		
12	u nilpotente non nulle $\Rightarrow u$ non diagonalisable.		
13	u inversible $\Leftrightarrow u$ diagonalisable.		
14	u diagonalisable $\Rightarrow u$ inversible.		
15	u diagonalisable et a une unique valeur propre $\Rightarrow u$ est une homothétie.		
16	On a $\dim(E_{\lambda_1}(u)) + \ldots + \dim(E_{\lambda_p}(u)) \leqslant \dim(E)$ avec égalité si, et seulement si, u diagonalisable.		
17	Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors u est trigonalisable.		
18	Si u a une unique valeur propre alors $u - \lambda \text{Id}_E$ est nilpotente.		
19	Si λ est valeur propre de u alors λ^3 est valeur propre de u^3.		
20	Les endomorphismes de rang 1 sont diagonalisables.		
21	u est diagonalisable $\Rightarrow u^k$ est diagonalisable ($k \in \mathbb{N}$)		
22	$u^2 = \text{Id}_E$ et u diagonalisable $\Rightarrow u = \pm\text{Id}_E$.		
23	Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.		
24	Deux matrices équivalentes par lignes (c'est-à-dire qu'on peut passer de l'une à l'autre par des opérations élémentaires sur les lignes) ont même polynôme caractéristique.		
25	u^2 diagonalisable $\Rightarrow u$ diagonalisable.		
26	La somme de deux endomorphismes diagonalisables est diagonalisable.		

Fin de l'épreuve