MP – CPGE Mohammed VI-Kénitra

Année scolaire 24/25

Devoir surveillé $n^\circ 4$

10/01/2025

Durée 2 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice 1 :

1. **1*a*.** Énoncer le théorème fondamental du cours sur les séries absolument convergentes et en donner une démonstration de votre choix. (On ne demande qu'une seule démonstration).

   1*b*. Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique. Si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est divergente, peut-on en conclure que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est divergente ? Justifier votre réponse par un exemple simple de votre choix.

   1*c*. Soient $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries numériques telles que $u_n \sim v_n$ pour n infini. Peut-on en conclure que ces séries sont de même nature ? Justifier votre réponse par un exemple simple.

2. Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ($n \geqslant p$) une série de fonctions convergeant simplement sur un domaine D de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$. On note F la fonction somme :

$$F(x) = \sum_{n=p}^{\infty} f_n(x), \quad \forall x \in D.$$

   2*a*. Quelles hypothèses supplémentaires suffit-il de faire pour pouvoir conclure que F est continue sur D ? Ces hypothèses sont-elles aussi nécessaires ?

   2*b*. D étant un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point), quelles hypothèses supplémentaires suffit-il de faire pour pouvoir conclure que F est dérivable sur D et que

$$F'(x) = \sum_{n=p}^{\infty} f_n'(x)?$$

   Ces hypothèses sont-elles nécessaires ?

2*c*. Expliquer ce que signifie l'expression « la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant p} f_n$ converge normalement sur D ». Quel est l'intérêt de cette notion de convergence normale ?

Exercice 2

1. Étudier, au point de vue de la convergence, la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ dans les cas suivants :

1*a*. $u_n = \dfrac{1}{n^n}$, $n_0 = 0$ ($0^0 = 1$) ;

1*b*. $u_n = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(n^2)}$, $n_0 = 0$;

1*c*. $u_n = \dfrac{1}{n^\lambda} \ln(n)$, $n_0 = 2$ (λ réel strictement positif donné) ;

1*d*. $u_n = n \ln(n) - n \ln(n+1) + 1$.

2. Soit α un réel strictement positif fixé. On se propose d'établir la convergence de la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ de terme général :

$$u_n = \frac{1}{[\mathbf{E}(n^\alpha)]!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{E}(x)$ est la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique entier a tel que $a \leqslant x < a+1$ d'autre part, si $p \in \mathbb{N}^*$, $p!$ (factorielle p) est le produit de tous les entiers compris entre 1 et p, on fait la convention $0! = 1$).

2*a*. Examiner le cas $\alpha \geqslant 1$.

2*b*. On suppose que $0 < \alpha < 1$. Montrer alors qu'on peut se ramener au cas où $\alpha = \dfrac{1}{q}$ avec q entier supérieur ou égal à 2.

Désormais, dans tout ce qui suit, on suppose $\alpha = \dfrac{1}{q}$ ($q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$).

2*c*. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, montrer que $m! > m^p$ si m est un entier suffisamment grand (c'est-à-dire pour tout $m \geqslant m_0$, avec m_o fixé).

2*d*. Conclure.

Problème : Soit α un réel strictement positif fixé.

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{n^{2\alpha}} \arctan(n^\alpha x).$$

1. 1*a*. Si $0 < \alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$, montrer que la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} f_n(x)$ est divergente en tout point x de $\mathbb{R}^*$.

1*b*. Si $\alpha > \dfrac{1}{2}$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et en déduire que la fonction somme F_α est continue sur $\mathbb{R}$.

Dans toute la suite au problème on suppose $\alpha > \dfrac{1}{2}$ et on note F_α la fonction somme définie par :

$$F_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}} \arctan(n^\alpha x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. **2*a*.** Montrer que F_α est continûment dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que la fonction dérivée F'_α est la somme d'une série de fonctions que l'on précisera.

2*b*. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $|x| \leqslant \dfrac{1}{k^\alpha}$, trouver une minoration simple de $f'_k(x)$.

2*c*. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x_n = \dfrac{1}{(2n)^\alpha}$, montrer que :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} f'_k(x_n) \geqslant \frac{n^{1-\alpha}}{2^{\alpha+1}}.$$

Si $\dfrac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f'_n$ est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}^*$?

3. On pose $I =]0, 1[$.

3*a*. Pour $t \in l$, montrer que $\arctan(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$ avec $u_n(t) = (-1)^n \dfrac{t^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in I$.

3*b*. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} u_k(t) \text{ pour tout } t \in I.$$

Montrer que, $\forall t \in I$, la suite $n \mapsto S_{2n+1}(t)$ est strictement croissante et en déduire que :

$$\arctan(t) > S_{2n+1}(t), \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall t \in I.$$

3*c*. Pour $t \in I$, montrer que $\arctan(t) > \dfrac{2}{3}t$. Cette inégalité est-elle encore vraie au point $t = 1$?

4. **4*a*.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $0 < x \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$, montrer que :

$$F_\alpha(x) > \frac{2x}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

4*b*. Si $\dfrac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$, F_α est-elle dérivable au point 0 ?

4*c*. Si $\alpha > 1$, montrer que F_α est dérivable au point 0. Que vaut $F'_\alpha(0)$?

Fin de l'épreuve