MP – CPGE Mohammed VI-Kénitra

Année scolaire 24/25

Devoir surveillé $n^\circ 5$

04/02/2025

Durée 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Problème 1

On désignera dans tout le problème par :

- $\mathscr{M}_{n,p}$ l'espace des matrices réelles à n lignes et p colonnes. On note $0_{n,p}$ la matrice nulle.
- $\mathscr{M}_n$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre n. On note 0_n la matrice nulle.
- ${}^tM$ la transposée d'une matrice M.
- $\mathscr{S}_n$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_n$ constitué des matrices symétriques d'ordre n, c'est à dire les matrices A qui satisfont ${}^tA = A$.
- I_n la matrice identité d'ordre n.
- $(X|Y)$ le produit scalaire de deux matrices colonnes.

On rappelle que pour toute matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}$ et tout couple de matrices colonnes (X, Y) où $X \in \mathscr{M}_{n,1}$ et $Y \in \mathscr{M}_{p,1}$, l'identité suivante est satisfaite :

$$(AX|Y) = (X|{}^tAY)$$

Définition : *Si A et B sont deux matrices de $\mathscr{S}_n$, on dit que A est plus petite que B pour l'ordre de Löwner, et on note $A \preceq B$, si la matrice $B - A$ est positive. On notera $A \prec B$ si $B - A$ est définie positive.*

On suppose dorénavant que A est une matrice symétrique réelle d'ordre n.

I. Matrices positives

1. Montrer que si A est positive, alors pour toute matrice réelle $M \in \mathscr{M}_{n,p}$, la matrice ${}^tMAM$ est symétrique positive.

2. Montrer que toutes les puissances entières d'une matrice symétrique positive A sont positives.

3. Si A est définie positive, montrer qu'il existe une matrice C, symétrique définie positive telle que $C^2 = A$.

4. Si A et C sont symétriques définies positives et $C^2 = A$, montrer que, pour toute valeur propre λ de A, on a :

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) = \operatorname{Ker}\left(C - \sqrt{\lambda} I_n\right)$$

5. En déduire que si A est définie positive, il existe une unique matrice symétrique définie positive C telle que $C^2 = A$ et que dans toute base orthonormale de vecteurs propres de A, la matrice C est diagonale.
On notera désormais $C = A^{1/2}$.

6. On suppose A définie positive. Montrer que A est inversible et qu'il existe une unique matrice, notée $A^{-1/2}$, symétrique définie positive telle que $A^{-1/2}A^{-1/2} = A^{-1}$.

7. Prouver que $\left(A^{1/2}\right)^{-1} = A^{-1/2}$.

II. Ordre de Löwner

1. Montrer que l'ordre de Löwner est une relation d'ordre sur $\mathscr{S}_n$.

2. Soit $B \in \mathscr{S}_n$ avec $A \preceq B$. Montrer que pour toute matrice réelle $C \in \mathscr{M}_{n,p}$, la relation ${}^tCAC \preceq {}^tCBC$ est vérifiée.

3. Montrer que si $I_n \preceq A$ alors A est inversible et $A^{-1} \preceq I_n$.

4. En déduire que si $0_n \prec A \preceq B$ alors B est inversible et que $B^{-1} \preceq A^{-1}$.

5. Donner un système de conditions nécessaires et suffisantes portant sur les réels a, b et c pour que la matrice $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit positive.

6. On considère les deux matrices suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer qu'il existe des réels a et b de sorte que $0_n \preceq D \preceq B$ mais que $D^2 \npreceq B^2$.

Problème 2

Dans tout le problème, α est un nombre réel et a est un *nombre complexe non nul de partis réelle positive ou nulle.*

-I-

Dans cette partie le réel α n'est pas un entier relatif. On définit une application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de période 2π par $g(x) = \cos(\alpha x)$ pour tout $x \in [-\pi, \pi[$.
On admet que g est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2\alpha\cos(nx)}{\alpha^2 - n^2}\right).$$

Montrer que la série au deuxième membre est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

-II-

Dans cette partie, $\alpha \in]0, 1[$.

1. Montrer que les intégrales $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x$ et $J(\alpha) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x$ sont convergentes et que $J(\alpha) = I(1-\alpha)$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel N,

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n \int_0^1 x^{\alpha+n-1}\mathrm{d}x + (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{x^{\alpha+N}}{1+x}\mathrm{d}x.$$

3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\alpha+N}}{1+x}\mathrm{d}x$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.

4. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha+n}.$$

5. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}.$$

6. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$.

-III-

Dans cette partie, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+a}e^{-xt}\mathrm{d}t$ est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Dans toute la suite du problème, on considère la fonction complexe de variable réelle f_α définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (au moins) par $f_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+a}e^{-xt}\mathrm{d}t$.
(la notation f_α sous-entend donc le paramètre a introduit au début du problème)

2. Montrer que f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f'_\alpha = -f_{\alpha+1}$.

3. f_α est elle de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$?

4. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente et strictement positive. On pose dans toute la suite du problème

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

5. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $af_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.

6. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $|f_\alpha(x)| \leqslant \dfrac{\Gamma(\alpha)}{|a|}x^{-\alpha}$.

7. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ est convergente et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_\alpha(x) = \Gamma(\alpha)e^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

-IV-

Dans cette partie, $\alpha \in]0,1[$, la notation f_α est introduite en **II.1.** et la notation $\Gamma(\alpha)$ en **III.6**.

1. Prouver l'existence de $f_\alpha(0)$.

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_\alpha(0) - f_\alpha(x) = x^{1-\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u+ax}(1-e^{-u})\mathrm{d}u.$$

3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^{\alpha-2}(1-e^{-u})\mathrm{d}u$ est convergente et vaut $\dfrac{\Gamma(\alpha)}{1-\alpha}$

4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$|f_\alpha(0) - f_\alpha(x)| \leqslant \frac{\Gamma(\alpha)}{1-\alpha}x^{1-\alpha}.$$

5. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+a}\mathrm{d}t = \Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t^\alpha}\mathrm{d}t$$

6. Montrer que $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$.

7. Que vaut $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$?

8. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u$ est convergente et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

9. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t-i}\mathrm{d}t$ (séparer les parties réelles et imaginaires et utiliser **II.6**)

10. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \Gamma(1-\alpha)e^{i\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}$.

11. Quelles valeurs obtient-on pour les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$?

12. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x$ sont convergentes et valent toutes deux $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Fin de l'épreuve