Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoire
aux Grandes Écoles
Khouribga

Année scolaire : 2011/2012
Filière **MP**

DEVOIR SURVEILLÉ COMMUN N°3

26/11/2011

durée : 4 heures

••••••••

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

••••••••

Problème I

On dit qu'une matrice $P = (p_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ est une matrice stochastique suivant les lignes si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,d]\!]^2,\ \ p_{ij} \geq 0 \ \text{ et }\ \forall i \in [\![1,d]\!],\ \ \sum_{j=1}^{d} p_{ij} = 1.$$

C'est une matrice de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ considérée comme appartenant à $\mathscr{M}_d(\mathbb{C})$.
Soit $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$, et $\lambda_1, ..., \lambda_d$, la famille des racines du polynôme caractéristique. Le rayon spectral de A est le nombre réel positif : $\rho(A) = \max\limits_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$.

Admettons le théorème suivant : Soit $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$. Alors il existe un et un seul couple (D, N) de matrices de $\mathscr{M}_d(\mathbb{C})$ tel que :

- *$A = D + N$ et D et N commutent.*
- *D est diagonalisable et N est nilpotent.*

PARTIE I
PRÉLIMINAIRE

Soit A une matrice carrée d'ordre n dont les éléments $a_{ij} \in \mathbb{C}$.

1. En considérant $\det A$ comme le déterminant d'un système de n équations linéaires, démontrer le théorème d'Hadmard :

$$\left(\forall i \in [\![1,n]\!],\ \ |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|\right) \Longrightarrow (A \ \text{ est inversible})$$

2. Déduire du résultat précédent les régions du plan d'Argand-Cauchy où se trouve les images des valeurs propres de A.

3. Application à la localisation des zéros du polynôme unitaire :

$$P_n \in \mathbb{C}[X] : \quad P_n(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + \ldots + a_n.$$

En démontrant d'abord que $(-1)^n P_n$ est le polynôme caractéristique de la matrice :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix},$$

localiser les zéros de P_n.

Partie II
Étude d'un exemple

On considère des nombres réels a et b de l'intervalle $]0, 1[$ et tels que $a + b = 1$. Soit f l'endomrphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice stochastique

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Ker}\,(f - Id)$ et $\mathrm{Im}(f - Id)$ sont supplémentaires.

2. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Déduire des résultats précédents l'expression de la matrice M^k, ainsi que sa limite lorsque k tend vers $+\infty$.

Partie III
Quelques propriétés des matrices stochastiques

1. Montrer que le produit de deux matrices stochastqiues est une matrice stochastique.
Dans la suite considérons une matrice stochastique $P = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq d}$ d'ordre d.

2. Soit λ une valeur propre de P. Montrer qu'il existe $i \in [\![1, d]\!]$ tel que

$$|\lambda - p_{ii}| \leq 1 - p_{ii}.$$

3. a) Prouver que toute valeur propre λ de P est telle que $|\lambda| \leq 1$.
   b) Prouver que 1 est valeur propre de P. En déduire que $\rho(P) = 1$.
   c) On suppose de plus que $p_{ij} > 0$ pour tout $(i, j) \in [\![, 1, d]\!]^2$. Montrer que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.

4. On considère une valeur propre λ de module 1. Montrer qu'il existe $s \in N^*$ tel que $\lambda^s = 1$.

5. Prouver que toute valeur propre λ de module 1 est d'indice 1(l'ordre de multiplicité de λ dans le polynôme minimal).
Pour cela, on sera amené à considérer y tel que :

$$(u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})^{n+1}(y) = 0.$$

Posant $z = (u - \lambda Id_{\mathbb{C}^d})(y)$, on démontrera par récurrence que :

$$u(z) = \lambda z \ \ et \ \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \ u^k(y) = \lambda^k y + k\lambda^{k-1} z.$$

Conclure en utilisant $k = ms$ avec m choisi assez grand. (u désigne l'endomorphisme représenté par P dans la base canonique de $\mathbb{C}^d$.)

6. Supposons que la valeur propre 1 soit simple et dominante, c'est-à-dire $\forall \lambda \in \text{Sp}(P)$ et $\lambda \neq 1, \ |\lambda| < 1$.
Montrer que la suite $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.(distinguer les deux cas : P diagonalisable et A non diagonalisable)

Problème II

Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$.
Si $a, b \in \mathscr{L}(E)$, l'endomorphisme $a \circ b$ sera noté ab et l'on pose $[a, b] = ab - ba$.
L'objet du problème est d'étudier dans quelques cas particuliers des propriétés du «crochet» $[a, b]$.

1. On suppose dans cette question que $E = \mathbb{C}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré au plus n, à coefficients dans $\mathbb{C}$, et l'on pose pour $P \in E$

$$e(P) = P', \ \ f(P) = -nXP + X^2P', \ \ h(P) = -nP + 2XP'.$$

   a) Calculer $[e, h]$, $[f, h]$, $[e, f]$.

   b) Soit $F \neq \{0\}$, un sous-espace de E stable par e, f, h, et $P \neq 0$ un élément de F. En examinant les degrés des images successives de P par e et par f, prouver que $F = E$.

E désigne maintenant un $\mathbb{C}$-espace vectoriel quelconque de dimension finie. On considère trois éléments de $\mathscr{L}(E)$ non nuls, notés e, f, h et vérifiant :

$$[e, h] = 2e, \ [f, h] = -2f, \ [e, f] = h.$$

On note $\mathscr{L}_3$ le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent.

2. Prouver que $\dim \mathscr{L}_3 = 3$.

3. Soit $\mathscr{I}$ un sous-espace de $\mathscr{L}_3$ tel que

$$\forall x \in \mathscr{I}, \forall a \in \mathscr{L}_3, [a, x] \in \mathscr{I}.$$

a) Montrer que si $\mathscr{I}$ contient un élément $x = \alpha e + \beta f + \gamma h$ avec $\gamma \neq 0$, alors $\mathscr{I} = \mathscr{L}_3$.

b) Prouver que si $\mathscr{I} \neq \{0\}$ alors $\mathscr{I} = \mathscr{L}_3$ (on pourra se ramener à la question précédente)

4. **a)** Soit y un vecteur propre de h ; prouver que si $e(y) \neq 0$, alors $e(y)$ est un vecteur propre de h.

b) En déduire qu'il existe un vecteur propre x de h tel que $e(x) = 0$.

Dans la suite de cette partie, on note x un tel vecteur, et on note α la valeur propre de h associée.

5. **a)** Calculer $h\left(f^k(x)\right)$ où k est un entier naturel.

b) En déduire qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^m(x) \neq 0$ et $f^{m+1}(x) = 0$.

c) Prouver que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $e\left(f^k(x)\right)$ est colinéaire à $f^{k-1}(x)$.

6. On suppose que E ne contient aucun sous-espace stable par $\mathscr{L}_3$ autre que $\{0\}$ et E. On pose

$$F = \operatorname{Vect}\left(x, f(x), \ldots, f^m(x)\right)$$

a) Justifier que F est stable par e, f et h. Que peut-on en déduire ?

b) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (x, f(x), \ldots, f^m(x))$ est une base de E.

c) Déterminer la matrice de h dans la base $\mathscr{B}$.

d) En examinant **Tr**(h), prouver que $\alpha = -m$.

7. Déterminer la matrice de e dans la base $\mathscr{B}$.

FIN DE L'ÉPREUVE