Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoire
aux Grandes Écoles
Khouribga

Année scolaire : 2011/2012
Filière **MP**

# DEVOIR SURVEILLÉ COMMUN N°4

14/01/2012

durée : 4 heures

••••••••

*Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.*

••••••••

## Exercice I

On considère les deux fonctions $f_1$ et $f_2$ définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f_1(x,y) = x^2 + y + 1 \quad \text{et} \quad f_2(x,y) = x + y^2 + 1$$

puis la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\left[(f_1(x,y))^2 + (f_2(x,y))^2\right].$$

1. Justifier que $F$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières.
2. Montrer que le système d'équations qui permet de déterminer les points critiques de $F$ peut se mettre sous la forme
$$\begin{cases} 2x^3 + 2xy + 3x + y^2 + 1 = 0 \\ (x-y)(2x^2 + 2xy + 2y^2 - x - y + 3) = 0 \end{cases}$$
3. On considère dans cette question la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$f(x,y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - x - y + \frac{1}{6}.$$
   - **a)** Dire pourquoi $f$ n'est pas une forme quadratique.
   - **b)** On pose $X = x - \frac{1}{6}$ et $Y = y - \frac{1}{6}$, puis $q(X,Y) = f(x,y)$.
     - i. Montrer que $q$ est alors une forme quadratique en $(X,Y)$.
     - ii. Réduire la forme quadratique $q$ par la méthode de Gauss.

iii. Établir, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'inégalité :

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 - x - y + 3 > 0.$$

**4.** En déduire que l'unique point critique de $F$ est $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$.

**5.** Déterminer en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ la hessienne de $F$, et en déduire que $F$ présente un minimum local en $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$.

# Exercice II

On désigne par $A_n = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ les $(n, n)$ matrices réelles telles que $a_{ij} = \inf(i, j)$, $1 \leq i, j \leq n$.

**1.** Montrer que $A_n$ possède $n$ valeurs propres réelles, distinctes ou confondues, dont aucune n'est nulle.

**2.** Soit $I_n$ la $(n, n)$ matrice unité. On pose $P_n(x) = \det(I_n - xA_n)$.

**a)** Vérifier la relation $P_n(x) = (2 - x)P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$.

**b)** Posant $x = 2 - 2\cos(2\theta)$, on écrit $P_n(2 - 2\cos(2\theta)) = Q_n(\theta)$.
Vérifier que $Q_n(\theta) = \dfrac{\cos(2n+1)\theta}{\cos\theta}$.

**c)** En déduire les valeurs propres de $A_n$.

**3.** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ rapporté à sa base canonique la matrice $A_n$ représente une forme quadratique $q$. En utilisant ce qui précède, montrer que $q$ est une forme définie positive.
Retrouver ce résultat en utilisant une décomposition de Gauss, qui fait intervenir les polynômes de la forme : $\xi_k = x_k + x_{k+1} + \ldots + x_n$.

# Problème

On admet que la somme de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k^2}$, $k \geq 1$ existe et vaut $\dfrac{\pi^2}{12}$.

## I. Transformation d'Abel

**1.** On considère deux suites de nombres réels $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$. On pose alors $A_p = \sum_{i=1}^{p} a_i$ et $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.
Établir la relation :

$$S_n = \sum_{i=2}^{n} A_{i-1}(b_{i-1} - b_i) + A_n b_n.$$

**2.** On suppose que les suites de la question précédente satisfont simultanément aux conditions suivantes :
• il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $p \geq 1$ on a : $|A_p| \leq M$ ;
• la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est monotone et converge vers zéro.
Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $p \geq 0$ on a :

$$|S_{n+p} - S_n| \leq 2M|b_{n+1}|$$

et en déduire que la série numérique dont le terme général est le produit $a_n b_n$ est convergente.

**3.** On rappelle qu'une série de terme général $u_n$ est alternée s'il existe un entier naturel $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n u_{n+1} < 0$.
Déduire de ce qui précède qu'une série alternée de terme général $u_n$, tel que la suite de terme général $|u_n|$ est décroissante et converge vers 0, est une série convergente.

**4.** Soit les fonctions de la variable réelles $x$ définies pour tout entier $n > 0$ par :

$$f_n : \ x \longmapsto f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

**a)** Pour quelles valeurs de $x$ la série de fonctions de terme général $f_n$ est-elle : convergente ? absolument convergente ?

**b)** A quelle condition doit satisfaire $x_1$ pour que la série de fonctions de terme général $f_n$ soit normalement convergente sur tout intervalle $[x_1, x_2]$ vérifiant $x_1 < x_2$ ?

## II. Application à l'étude d'une série trigonométrique

**1.** Soit $n$ entier strictement positif et $x \neq 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Établir les formules :

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin(2n+1)\dfrac{x}{2}}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)};$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \sin(n+1)\frac{x}{2}\frac{\sin n\dfrac{x}{2}}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}.$$

**2.** $k$ étant entier naturel, $n$ étant entier strictement positif et $s$ étant réel, on définit, pour $x \neq 2k\pi$, les fonctions réelles $g_n$ et $h_n$ respectivement par :

$$g_n : \ x \longmapsto g_n(x) = \frac{1}{n^s}\sin(nx);$$

$$h_n : \ x \longmapsto h_n(x) = \frac{1}{n^s}\cos(nx).$$

Déduire de ce qui précède les valeurs de $s$ pour lesquelles les séries de terme général respectif $g_n$ et $h_n$ sont simultanément simplement convergentes sur l'ensemble de définition de ces fonctions.

**3.** $k$ étant un entier naturel, on définit, pour tout $x \neq 2k\pi$, la fonction réelle $y_n$, de la variable réelle $x$, par :

$$y_n : x \longmapsto y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin(kx).$$

**a)** Déterminer des expressions $v_n(x)$ et $w_n(x)$ telles que :

$$(3) \;\; y_n(x) = \frac{\pi - x}{2} + \frac{1}{2n+1}\left[v_n(x) + \int_{\pi}^{x} w_n(t)dt\right] \quad \text{où} \quad 0 < x < \pi.$$

**b)** Soit $\alpha$ et $\beta$ des réels tels que $0 < \alpha < \beta < \pi$. Déduire de $(3)$ que la suite de terme général $y_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ vers la fonction

$$y : x \longmapsto y(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

**4.** **a)** Montrer que pour tout $x$, tel que $-\pi < x < 0$ ou $0 < x < \pi$, la série de fonctions de terme général

$$z_n : x \longmapsto z_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$$

est convergente et déterminer la valeur de sa somme en fonction de celle de $x$.

**b)** En déduire la limite, lorsque $p$ tend vers l'infini, de la somme :

$$S_p = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + (-1)^p \frac{1}{2p+1}.$$

## III. Calcul d'une intégrale

Établir la convergence de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt.$$

Justifiant soigneusement chaque étape du calcul, déterminer le terme général d'une série numérique convergente dont $I$ est la somme.
Donner le réel auquel $I$ est égal.


Fin de l'épreuve