Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoire
aux Grandes Écoles
Khouribga

Année scolaire : 2011/2012
Filière **MP**

DEVOIR SURVEILLÉ COMMUN N°5

04/02/2012

durée : 4 heures

••••••••

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

••••••••

Soit $\mathscr{C}^\infty$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes indéfiniment dérivables et $\mathscr{S}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty$ constitué des fonctions f de $\mathscr{C}^\infty$ telles que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \qquad \lim_{|x|\to\infty} x^p f^{(q)}(x) = 0.$$

Soit U, V, H les applications de $\mathscr{C}^\infty$ dans $\mathscr{C}^\infty$ définies par :

$$(Uf)(x) = xf(x) + f'(x);$$

$$(Vf)(x) = xf(x) - f'(x);$$

$$(Hf)(x) = x^2 f(x) - f''(x).$$

L'objet du problème est l'étude et la détermination des valeurs propres et des sous-espaces propres de l'application linéaire H.

PARTIE I

1. Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathscr{S}$ de $\mathscr{C}^\infty$ est stable par la multiplication.

Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto e^{tx - \frac{x^2}{2}}$ est un élément de $\mathscr{S}$. $\mathscr{S}$ est donc est un sous-algèbre non réduit à $\{0\}$.

2. Démontrer que les applications U, V et H sont des endomorphismes de $\mathscr{S}$ et exprimer l'application composée $V \circ U$ en fonction de H et l'application identité Id.

3. Montrer que pour tout $f \in \mathscr{S}$ et pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, il existe $M_{p,q} \in \mathbb{R}^+$, dépendant de f tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leq \frac{M_{p,q}}{1+x^2}.$$

4. Soit f et g deux éléments de $\mathscr{S}$. Prouver que les applications $x \longmapsto f^2(x)$ et $x \longmapsto f(x)g(x)$ ont des intégrales absolument convergentes sur toute la droite $\mathbb{R}$.

5. Déduire de ce qui précède, que l'application de $\mathscr{S} \times \mathscr{S}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$(f,g) \longmapsto (f|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}g(x)dx$$

fait de $\mathscr{S}$ un espace préhilbertien complexe. Soit $\|f\|$ la norme de f dans cette espace.
Expliciter l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en déduire une relation entre $I_1 = (f|g) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}g(x)dx$; $I_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2dx$ et $I_3 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2dx$.

6. Démontrer que pour tout couple (f,g) de $\mathscr{S} \times \mathscr{S}$, on a :

$$(Uf|g) = (f|Vg); \quad (Vf|g) = (f|Ug) \quad \text{et} \quad (Hf|g) = (f|Hg).$$

En déduire que si les valeurs propres de l'endomorphisme H, défini dans $\mathscr{S}$, existent elles sont réelles.

PARTIE II

Soit t un réel quelconque. Soit u_t la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_t(x) = a(t)e^{tx - \frac{x^2}{2}} \text{ où } a(t) \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer $a(t)$ de façon que $\|u_t\| = e^{\frac{t^2}{4}}$ en supposant connu $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.
Exprimer $(Uu_t)(x)$ et $(Vu_t)(x)$ en fonction de t, x et $u_t(x)$.
On suppose, dans la suite du problème, que $\|u_t\| = e^{\frac{t^2}{4}}$.

2. Soit $f \in \mathscr{S}$. Montrer que l'application $x \longmapsto f(x)e^{tx - \dfrac{x^2}{2}}$ a une intégrale absolument convergente sur $\mathbb{R}$.
Soit Lf la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(Lf)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x)f(x)dx.$$

Calculer Lu_0. Montrer les propriétés suivantes :

a) $(Lf)(t) = (u_t|f)$;

b) $(L \circ V)(f)(t) = t(Lf)(t)$,

c) La fonction définie par $t \longmapsto (Lf)(t)e^{-\dfrac{t^2}{2}}$ est bornée.

3. Soit $f \in \mathscr{S}$. Désignons par F, G et F_n les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{tx - \frac{x^2}{2}}dx$$

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{tx - \frac{x^2}{2}}dx$$

$$F_n(t) = \int_{-n}^{+n} f(x)e^{tx - \frac{x^2}{2}}dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Prouver que F_n est continument dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que sur tout intervalle $[-A, +A]$, $A > 0$, la suite de fonctions $(F'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers G et de même la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers F.
En déduire la dérivée de F.

4. En déduire que pour tout $f \in \mathscr{S}$, $(Lf)' = \dfrac{1}{2}(L \circ U)(f)$. Démontrer que L est linéaire de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{C}^\infty$.

5. Exprimer $(L \circ H)f$ en fonction de Lf et $(Lf)'$.

Partie III

Soit h_0 définie par $h_0(x) = e^{-\dfrac{x^2}{2}}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et h_n définie par $h_n = V^n h_0, \quad n \in \mathbb{N}^*$ où $V^n = V \circ V \circ ... \circ V$ n fois.

1. Calculer Lh_n, $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $f \in \mathscr{S}$, P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et $g_n \longmapsto x^n f(x), \quad n \in \mathbb{N}$. Montrer que

a) $Lf = 0$ si, et seulement si, $Lg_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) $L(Ph_0) = 0 \Longrightarrow P = 0$ où $Ph_0(x) = P(x)h_0(x)$.

Soit $\mathscr{E}$ le sous espace vectoriel de $\mathscr{S}$:

$$\mathscr{E} = \{f / \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = P(x)h_0(x), \ \ P \in \mathbb{C}[X]\}$$

Montrer que l'application L est injective de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{C}^\infty$.

3. Montrer que les seules valeurs du réel λ pour quel'équation différentielle

$$2ty'(t) + y(t) = \lambda y(t),$$

admet une solution autre que la solution nulle dans l'espace $\mathscr{C}^\infty$ sont de la forme $\lambda = 2n+1, \ \ n \in \mathbb{N}$.
En déduire que les seules fonctions propres de l'endomorphisme H, qui appartiennent à $\mathscr{E}$, sont les h_n (à un facteur près) associées aux valeurs propres $2n+1$, $n \in \mathbb{N}$.

FIN D'ÉPREUVE