DEVOIR SURVEILLÉ COMMUN N°1

22/09/2012

durée : 3 heures

EXERCICE 1

On définit une application sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant

$$N(A) = n \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \text{ si } A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Vérifier que l'on définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis qu'il s'agit d'une norme d'algèbre, c'est-à-dire que

$$N(AB) \leq N(A)N(B)$$

pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE 2

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit une norme sur E en posant

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(t)| dt.$$

On va montrer que E muni de cette norme n'est pas complet. Pour cela, on définit une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq t \leq -\frac{1}{n} \\ nt & \text{si } -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

1. Vérifier que $f_n \in E$ pour tout $n \geq 1$.
2. Montrer que

$$\|f_n - f_p\|_1 \leq \sup \left(\frac{2}{n}, \frac{2}{p} \right)$$

et en déduire que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy.

3. Supposons qu'il existe une fonction $f \in E$ telle que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers f dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
Montrer qu'alors on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) - f(t)| dt = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^1 |f_n(t) - f(t)| dt = 0$$

pour tout $0 < \alpha < 1$.

4. Montrer qu'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) + 1| dt = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^1 |f_n(t) - 1| dt = 0$$

pour tout $0 < \alpha < 1$. En déduire que

$$f(t) = -1 \text{ si } t \in [-1, 0[\text{ et } f(t) = 1 \text{ si } t \in]0, 1].$$

5. Conclure.

EXERCICE 3

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: ce sont les fonctions f telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$$

Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: ce sont les fonctions f telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$$

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I}$ est réduit à la fonction nulle.
3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les deux fonctions φ et ϕ , définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } \phi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

- (a) Montrer que $\varphi \in \mathcal{P}$, $\phi \in \mathcal{I}$ et $f = \varphi + \phi$.
 - (b) En déduire que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.
4. Soit p la projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{I}$ et s la symétrie par rapport à $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{I}$. Calculer l'image par p et s des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto 1 + x, \quad f_2 : x \mapsto \sin x + \cos x, \quad f_3 : x \mapsto e^x - e^{-2x}.$$

PROBLÈME

On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note D l'application définie sur E , et à valeurs dans E , qui à toute fonction f de E associe $D(f) = f'$, sa dérivée, ainsi que Id l'identité de E , vérifiant $Id(f) = f$ pour toute application f de E .

Dans la suite du problème α désigne un réel non nul et on note F_α , l'ensemble des fonctions de E de la forme

$$x \mapsto P(x)e^{\alpha x} + Q(x)e^{-\alpha x}$$

où P et Q sont des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 1. On note id_α , l'application identique sur F_α .

1. (a) Montrer que F_α est un sous-espace vectoriel de E .
- (b) On considère les fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto e^{\alpha x}, \quad f_2 : x \mapsto xe^{\alpha x}, \quad f_3 : x \mapsto e^{-\alpha x}, \quad f_4 : x \mapsto xe^{-\alpha x}.$$

Montrer que la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de F_α .

On note D_α , la restriction de D à F_α , c'est à dire l'application définie sur F_α , qui à toute fonction f de F_α associe $D_\alpha(f) = f'$, sa dérivée.

2. (a) Montrer que D est un endomorphisme de E . Déterminer son noyau et son image.
 - (b) Montrer que D_α est un endomorphisme de F_α .
 - (c) Déterminer M_α , la matrice de D_α , dans la base $\mathcal{B}$.
 - (d) Montrer que la matrice M_α est inversible.
3. Soit λ un réel. Déterminer en fonction de λ le rang de l'endomorphisme $D_\alpha^2 - \lambda id_\alpha$.
 4. (a) Déterminer une base du noyau de $D_\alpha^2 - \alpha^2 id_\alpha$ et une base de l'image de $D_\alpha^2 - \alpha^2 id_\alpha$.
 - (b) Dédire de 4.(a) que pour tout f de F_α , on a l'égalité :

$$(D_\alpha^2 - \alpha^2 id_\alpha)^2(f) = 0.$$

(c) Montrer que $D_\alpha^4 - 2\alpha^2 D_\alpha + \alpha^4 id_\alpha = 0$ et en déduire D_α^{-1} .

5. (a) On se place désormais dans E . Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y''(x) - \alpha^2 y(x) = 0.$$

- (b) Déterminer le noyau de $D^2 - \alpha^2 Id$.
- (c) Montrer que pour toute application f , appartenant au noyau de $(D^2 - \alpha^2 Id)^2$, il existe un couple de réels, (λ_1, λ_3) , tel que $(D^2 - \alpha^2 Id)(f) = \lambda_1 f_1 + \lambda_3 f_3$, puis que l'application

$$g = f - \frac{\lambda_1}{2\alpha} f_2 + \frac{\lambda_3}{2\alpha} f_4$$

appartient au noyau de $D^2 - \alpha^2 Id$. En déduire le noyau de $(D^2 - \alpha^2 Id)^2$.

6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y^{(4)}(x) - 2\alpha^2 y''(x) + \alpha^4 y(x) = 0.$$

où l'on note $y^{(4)}$ la dérivée quatrième de la fonction $x \mapsto y(x)$.

7. Soit $\mathbf{E}$ l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y^{(4)}(x) - 2y''(x) + y(x) = x^3 - 12x + 2.$$

- (a) Montrer que $\mathbf{E}$ possède une solution polynômiale et la déterminer. On notera par la suite f_0 , cette solution polynômiale.
- (b) Soit f une solution de $\mathbf{E}$; montrer que $f - f_0$ est un élément du noyau de $(D^2 - Id)^2$ et en déduire l'ensemble des solutions de $\mathbf{E}$ sur $\mathbb{R}$.

FIN DE L'ÉPREUVE