DEVOIR SURVEILLÉ COMMUN N°2

20/10/2012

durée : 4 heures

•••••

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

•••••

PROBLÈME I : CONTINUITÉ PAR RAPPORT AU SECOND MEMBRE DE LA SOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des réels, E l'espace vectoriel des fonctions continues, définies sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, F l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, définies sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $f \in E$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ et on rappelle que l'on définit ainsi une norme sur E .

Si g est une application k fois dérivable sur $[0, 1]$, $g^{(k)}$ désigne la dérivée k -ième de g .

Préliminaire.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0, 1]$. On suppose que pour tout, $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $u^{(k)}(0) = 0$.

Prouver que :

$$\forall x \in [0, 1], u(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u^{(n)}(t) dt.$$

Partie I : Pour $g \in F$ donnée, recherche de $f \in F$ vérifiant la relation :

$$(S) \quad \forall x \in [0, 1], f(x) - \int_0^x f(t) dt = g(x).$$

Question 1.

1. Montrer l'équivalence :

$$f \in F \text{ est solution de } (S) \Leftrightarrow (\forall x \in [0, 1], f'(x) - f(x) = g'(x) \text{ et } f(0) = g(0))$$

On note (*) l'équation différentielle $y' - y = g'(x)$.

2. Résoudre l'équation différentielle (*).

Question 2.

Prouver que (S) possède dans F une unique solution f définie par :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = g(x) + \int_0^x e^{x-t} g(t) dt.$$

Question 3 : Application.

Déterminer la solution f de (S) lorsque g est la fonction $x \mapsto \cos(x)$, $x \in [0, 1]$.

PARTIE II : Quelques propriétés de la fonction $T : f \in E \mapsto T(f)$ définie par :

$$\forall x \in [0, 1], T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

On définit l'application T qui à $f \in E$ associe l'application $T(f)$, définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $T^n = T \circ T^{n-1}$, sachant que $T^0 = I_E$ (application identité de E).
Lorsque U est un endomorphisme continu de E , on désigne par $\|U\|$ le réel positif :

$$\|U\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \|U(f)\|_\infty.$$

Question 1.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E .
2. Préciser $\text{Ker}(T)$ et $\text{Im}(T)$.

Question 2.

1. Montrer que $\forall x \in [0, 1], |T(f)(x)| \leq \|f\|_\infty$.
En déduire que T est une application continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2. Prouver que $\|T\| \leq 1$.
3. On considère $f_0 : x \in [0, 1] \mapsto f_0(x) = 1$. Que vaut $\|T(f_0)\|_\infty$?
4. Calculer $\|T\|$.

Question 3.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $T^n(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0, 1]$.
2. Prouver que pour tout entier naturel $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $(T^n(f))^{(k)} = T^{n-k}(f)$.
3. Que vaut $(T^n(f))^{(n)}$? $(T^n(f))^{(k)}(0)$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$?
4. Montrer alors que : $\forall x \in [0, 1], (T^n(f))(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt$.
5. Préciser $\text{Ker}(T^n)$ et $\text{Im}(T^n)$.
6. Prouver que T^n est un endomorphisme continu de $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

7. En utilisant la fonction f_0 définie à la question 2., prouver que : $\|T^n\| = \frac{1}{n!}$.

8. En déduire que : $\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(f)(x) = 0$. Préciser $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n$.

Partie III : Pour $g \in E$ donnée, recherche de $f \in E$ vérifiant

$$(S) \quad : \quad \forall x \in [0, 1], f(x) - \int_0^x f(t)dt = g(x).$$

On note H l'application qui à $f \in E$ associe l'application $H(f)$ définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], H(f)(x) = \int_0^x e^{x-t} f(t)dt.$$

Question 1.

1. Montrer que H est un endomorphisme de E .
2. Prouver qu'il existe $K \geq 0$ tel que pour tout $x \in [0, 1], |H(f)(x)| \leq K\|f\|_\infty$. En déduire que H est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et que $\|H\| \leq e$.
3. Montrer que $H(f)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Calculer, pour $x \in [0, 1], (H(f))'(x)$.

Question 2.

Prouver que $\forall f \in E, \forall x \in [0, 1]$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} |T^n(f)(x)|$ est convergente.

PROBLÈME II : FONCTIONS DE LEGENDRE ET TRANSFORMÉE DE LEGENDRE-FENCHEL

Question préliminaire : Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$, convexe. Montrer que φ' est croissante.

On définit une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement convexe, c'est-à-dire telle que :

$$\forall t \in]0, 1[, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, x \neq y : f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y),$$

et telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty$.

Une telle fonction est appelée fonction de Legendre. ($(\cdot|\cdot)$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive (c'est-à-dire ${}^t A = A, (Ax|x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $(Ax|x) = 0 \implies x = 0$). On rappelle aussi que $(Ax|y) = (x|Ay)$ pour tout x et y de $\mathbb{R}^n$.

Montrer que que l'application $(x, y) \mapsto (Ax|y)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. En déduire que $x \mapsto \sqrt{(Ax|x)}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Montrer que l'application $f : x \mapsto f(x) = (Ax|x)$ est de Legendre. (Indication : utiliser l'équivalence des normes)

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $g : x \mapsto \|Ax\|^2$ est de Legendre si, et seulement si, A est inversible.

On considère dorénavant une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de Legendre.

3. Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_0) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.
4. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $f(y) \geq f(x) + \left(\overrightarrow{\text{grad}} f(x) | y - x \right)$. (Indication : utiliser la convexité de l'application $t \mapsto f(x + t(y - x))$)
5. En déduire que f admet un unique point critique.

Soit $u \in \mathbb{R}^n$. On pose $f_u(x) = f(x) - (u|x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

6. Montrer que f_u est une fonction de Legendre.
7. En déduire que $\overrightarrow{\text{grad}} f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une bijection continue.
8. (a) En utilisant la fonction convexe $t \mapsto f(tx)$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
$$\left\| \overrightarrow{\text{grad}} f(x) \right\| \geq \frac{f(x) - f(0)}{\|x\|}.$$
 (b) En déduire que $\overrightarrow{\text{grad}} f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme. (Indication : considérer une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite y telle que $y_n = \overrightarrow{\text{grad}} f(x_n)$ et montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.)

On définit $f^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par $f^*(u) = \left(u | \left(\overrightarrow{\text{grad}} f \right)^{-1}(u) \right) - f \left(\left(\overrightarrow{\text{grad}} f \right)^{-1}(u) \right)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$.

9. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $f^*(u) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} ((u|y) - f(y))$.
10. Montrer que f^* est de classe $\mathcal{C}^1$ et que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{\text{grad}} f^*(u) = \left(\overrightarrow{\text{grad}} f \right)^{-1}(u)$.
(Indication : on pose $x = \left(\overrightarrow{\text{grad}} f \right)^{-1}(u)$, $x + k = \left(\overrightarrow{\text{grad}} f \right)^{-1}(u + h)$ et montrer que :
$$0 \leq f^*(u + h) - f^*(u) - \left(\left(\overrightarrow{\text{grad}} f \right)^{-1}(u) | h \right) \leq (h|k). \text{)}$$
11. (a) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est strictement convexe si, et seulement si, $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $f(y) > f(x) + \left(\overrightarrow{\text{grad}} f(x) | y - x \right)$.
(b) Montrer que la fonction f^* est de Legendre.
12. Donner f^* et $\overrightarrow{\text{grad}} f^*$ pour la fonction f donnée dans la question 1.

FIN DE L'ÉPREUVE