DEVOIR SURVEILLÉ COMMUN N°3

01/12/2012

durée : 4 heures

•••••

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

•••••

Problème I **Caractérisation des matrices de trace nulle**

On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Pour un vecteur $x \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$, on notera $\text{Vect}(x)$ le sous-espace vectoriel engendré par x . A toute matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on associe le nombre $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ appelé trace de A . Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites semblables s'il existe une matrice P inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}BP$.

Partie I

1. Démontrer que l'application tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
3. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et u un endomorphisme de E , montrer que si x et $u(x)$ sont liés pour tout $x \in E$, alors u est une homothétie.
4. Soit u un endomorphisme non nul de trace nulle. Justifier l'existence d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que x et $u(x)$ soient indépendants, ainsi que celle d'un supplémentaire F de $\text{Vect}(x)$ contenant $u(x)$.

Partie II

5. Montrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de trace nulle est semblable à une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont nuls. (*utiliser une base de la forme (x, Ax)*)
6. Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner suivant D , l'image de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par l'application $\varphi : A \mapsto DA - AD, A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

7. Montrer que la matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de trace nulle si, et seulement si, il existe deux matrices X et Y de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = XY - YX$.

Donner pour la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ un couple (X, Y) vérifiant la condition précédente.

8. Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}$$

On pose $I = \{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 / d_i \neq d_j\}$ et $J = \{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 / d_i = d_j\}$.

- (a) Donner suivant la matrice D la dimension de l'image de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par l'application $\varphi : A \mapsto DA - AD$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en fonction de $\text{card } I$.
- (b) Reconnaître cette image dans le cas où $d_i = i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Donner dans ce cas une base du noyau de l'application φ .
- (c) Soit $E_n = \text{Im}(\varphi)$ l'image reconnue dans la question précédente. Montrer que toute matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle est semblable à une matrice de E_n .
(On pourra commencer par montrer que A est semblable à une matrice $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ telle que $b_{11} = 0$ et raisonner par récurrence sur n .)
En déduire qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de trace nulle si, et seulement si, il existe deux matrices X et Y de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = XY - YX$. Peut-on imposer à X et Y d'être également de trace nulle ?

Partie III

9. APPLICATION : Soit A une matrice d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$ et de trace nulle.

- (a) Montrer qu'il existe trois matrices B, C, D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$A = BDC + jDCB + j^2CBD$$

$$\text{où } j = e^{i \frac{2\pi}{3}}.$$

- (b) En général, montrer qu'il existe des matrices $A_1, A_2, \dots, A_n$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$A = \sum_{i=1}^n w^{i-1} (A_1 A_2 \dots A_n)^{(i)}$$

$$\text{où } w = e^{i \frac{2\pi}{n}} \text{ et pour tout } j \in \llbracket 1, n \rrbracket (A_1 A_2 \dots A_n)^{(j)} = A_j A_{j+1} \dots A_{j-1}.$$

Problème II : Matrices stochastiques

On dit qu'une matrice $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une matrice stochastique suivant les lignes si :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, p_{ij} \geq 0 \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1.$$

C'est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ considérée comme appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ces matrices jouent un rôle important, notamment en calcul des probabilités. On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une matrice de permutation s'il existe une permutation σ de $\{1, 2, \dots, n\}$ tel que $a_{ij} = \delta_{i\sigma(j)}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, la famille des racines du polynôme caractéristique. Le rayon spectral de A est le nombre réel positif : $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$.

Admettons le théorème suivant : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors il existe un et un seul couple (D, N) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que :

- $A = D + N$ et D et N commutent.
- D est diagonalisable et N est nilpotent.

On pourra utiliser ce théorème dans la question 5. de la troisième partie.

PARTIE I PRÉLIMINAIRE

Soit A une matrice carrée d'ordre n dont les éléments $a_{ij} \in \mathbb{C}$.

1. En considérant $\det A$ comme le déterminant d'un système de n équations linéaires, démontrer le théorème d'Hadmar :

$$\left(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right) \implies (A \text{ est inversible})$$

2. Dédire du résultat précédent les régions du plan d'Argand-Cauchy où se trouve les images des valeurs propres de A .
3. Application à la localisation des zéros du polynôme unitaire :

$$P_n \in \mathbb{C}[X] : P_n(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + \dots + a_n.$$

En démontrant d'abord que $(-1)^n P_n$ est le polynôme caractéristique de la matrice :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix},$$

localiser les zéros de P_n .

PARTIE II ÉTUDE D'UN EXEMPLE

Dans cette partie, on suppose que $n \geq 3$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_1, \dots, e_n)$ est la matrice stochastique :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

On note v le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes dans la base canonique $\mathcal{B}$ sont toutes égales à 1.

1. (a) Déterminer une base du noyau de $f - Id$.
(b) Démontrer que $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_n)$ est une famille libre d'éléments de $\text{Im}(f - Id)$, puis établir que c'est une base de cet espace.
(c) Prouver que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f - Id) \oplus \text{Im}(f - Id)$.
(d) Soit p le projecteur sur le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(f - Id)$ de direction $\text{Im}(f - Id)$. Déterminer $p(v)$ puis $p(e_1), p(e_2), \dots, p(e_n)$. Expliciter la matrice P associée à p dans la base $\mathcal{B}$.
(e) Soit q le projecteur sur le sous-espace vectoriel $\text{Im}(f - Id)$ de direction $\text{Ker}(f - Id)$. Établir que $p + q = Id$ et que $p \circ q = q \circ p = 0$. Expliciter la matrice Q associée à q dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associées. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
3. Exprimer M comme combinaison linéaire de P et Q . En déduire l'expression de la matrice M^k , ainsi que sa limite lorsque k tend vers $+\infty$ en fonction des matrices P et Q . (On rappelle que la limite de la matrice M^k est la matrice dont tous les coefficients sont les limites des coefficients de M^k). Exprimer de même l'inverse de M en fonction de P et Q .

PARTIE III QUELQUES PROPRIÉTÉS DES MATRICES STOCHASTIQUES

1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.
2. Montrer que toute matrice de permutation est une matrice stochastique. En déduire que l'ensemble des matrices stochastiques inversibles dont l'inverse est stochastique est un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.
Dans la suite considérons une matrice stochastique $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ d'ordre n .
3. Soit λ une valeur propre de P . Montrer qu'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que
$$|\lambda - p_{ii}| \leq 1 - p_{ii}.$$
4. (a) Prouver que toute valeur propre λ de P est telle que $|\lambda| \leq 1$.
(b) Prouver que 1 est valeur propre de P . En déduire que $\rho(P) = 1$.
(c) On suppose de plus que $p_{ij} > 0$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Montrer que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.
5. Supposons que la valeur propre 1 soit simple et dominante, c'est-à-dire $\forall \lambda \in \text{Sp}(P)$ et $\lambda \neq 1, |\lambda| < 1$.
Montrer que la suite $(P^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente. (distinguer les deux cas : P diagonalisable et A non diagonalisable)

FIN DE L'ÉPREUVE