

DEVOIR SURVEILLÉ COMMUN N°4

12/01/2013

durée : 4 heures

• • • • •

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

• • • • •

Autour des matrices symétriques

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre n , à coefficients dans $\mathbb{R}$. O_n désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et I_n sa matrice unité.

Pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, on définit sa trace $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. On note $\mathcal{S}_n$

l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques.

On considère d'autre part l'espace $\mathbb{R}^n$ identifié selon l'usage à $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique défini par : $(X|Y) = {}^tXY$ où, selon l'usage on note de la

même façon l'élément $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et la matrice unicolonne : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

et on notera $\|X\| = \sqrt{(X|X)}$.

Enfin, pour $A \in \mathcal{S}_n$, on note Q_A et B_A les applications définies par : $Q_A(X) = {}^tXAX$, $B_A(X, Y) = {}^tXAY$, pour X et Y dans $\mathbb{R}^n$.

PREMIÈRE PARTIE

1. Rappeler brièvement pourquoi $\mathcal{S}_n$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et en préciser la dimension.
2. Montrer que la relation définie sur $\mathcal{S}_n$ par :

$M \leq N$ si et seulement si pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ on a : ${}^tXMX \leq {}^tXNX$.

est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n$.

3. Soit $A \in \mathcal{S}_n$. Montrer que l'ensemble $\{{}^tXAX/X \in \mathbb{R}^n, \|X\| = 1\}$ est borné, et déterminer son maximum et son minimum en fonction des valeurs propres de A .
4. Pour $A \in \mathcal{S}_n$, on note $\mathcal{N}(A) = \sup\{|{}^tXAX|/X \in \mathbb{R}^n, \|X\| = 1\}$
 - (a) Pour A dans $\mathcal{S}_n$, soit $\text{Sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres dans $\mathbb{R}$, et $\rho(A)$ le maximum des valeurs absolues des éléments de $\text{Sp}(A)$. Montrer que $\mathcal{N}(A) = \rho(A)$.
 - (b) Montrer que $\mathcal{N}$ est une norme sur $\mathcal{S}_n$.
 - (c) Montrer que pour A dans $\mathcal{S}_n$ on a pour tous X et Y dans $\mathbb{R}^n$:

$$B_A(X, Y) \leq \mathcal{N}(A) \|X\| \|Y\|$$

- (d) En déduire que : $\mathcal{N}(A) = \max\{|B_A(X, Y)|/(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \|X\| = \|Y\| = 1\}$.
- (e) Montrer que pour A dans $\mathcal{S}_n$, et tout k dans $\mathbb{N}$, A^k est dans $\mathcal{S}_n$, et qu'on a : $\mathcal{N}(A^k) = [\mathcal{N}(A)]^k$.
- (f) Montrer que pour A dans $\mathcal{S}_n$, et r dans $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\mathcal{N}(A) \leq r \Leftrightarrow -rI_n \leq A \leq rI_n.$$

($\leq$ désigne la relation d'ordre définie en 2.)

5. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\mathcal{N}'(M) = \sup\{\|MX\|/X \in \mathbb{R}^n, \|X\| = 1\}$.
 - (a) Justifier brièvement que $\mathcal{N}'$, ainsi définie, est une norme sur $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, telle que pour toutes M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :
- $$\mathcal{N}'(MN) \leq \mathcal{N}'(M) \mathcal{N}'(N).$$
- (b) Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, prouver que $A = {}^tMM$ est dans $\mathcal{S}_n$ et $O_n \leq A$. Montrer que M et A ont le même rang, et comparer $\mathcal{N}(A)$ et $\mathcal{N}'(M)$.
6. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{S}_n$, croissante : c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $A_k \leq A_{k+1}$.
Montrer qu'une telle suite converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (muni d'une norme à préciser), si et seulement si, il existe M dans $\mathcal{S}_n$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait $A_k \leq M$, la limite de cette suite étant alors dans $\mathcal{S}_n$.
 7. Soient A dans $\mathcal{S}_n$, $r = \mathcal{N}(A)$, et x dans $\mathbb{R}$.

- (a) Montrer que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} x^k A^k$ converge dans $\mathcal{S}_n$ (normé également par une norme à préciser), si et seulement si $|rx| < 1$.

- (b) Dans le cas où cette série converge, on note $S_A(x)$ sa somme, prouver alors que $(I_n - xA)$ est inversible et préciser son inverse en fonction de $S_A(x)$.
Le polynôme caractéristique de A sera noté χ_A . Montrer que

$$\text{tr}(S_A(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \text{tr}(A^k)x^k = \frac{1}{x} \frac{\chi'_A\left(\frac{1}{x}\right)}{\chi_A\left(\frac{1}{x}\right)},$$

si x est différent de 0. Quelle est la valeur de $\text{tr}(S_A(0))$

- (c) **APPLICATION :** soient a et b dans $\mathbb{R}$, expliciter $\mathcal{N}(A)$ et $S_A(x)$ pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où pour tous i et j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$: $a_{ii} = a$ et pour $i \neq j$, $a_{ij} = b$. Les calculs seront effectués en posant $\alpha = a - b$ et $\beta = a + (n - 1)b$.
On exprimera $S_A(x)$ en fonction de x, α, β, I_n, A .

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie, on s'intéresse à des propriétés particulières des matrices des sous-ensembles de $\mathcal{S}_n$, notées $\mathcal{S}_n^+$ et $\mathcal{S}_n^{++}$, définis par :

$$\mathcal{S}_n^+ = \{M \in \mathcal{S}_n / O_n \leq M\}$$

(toujours avec $\leq$ définie dans 2.)

$$\mathcal{S}_n^{++} = \{M \in \mathcal{S}_n / (\forall X \in \mathbb{R}^n, (X \neq 0 \Rightarrow {}^t X M X > 0))\}$$

8. Soit $A \in \mathcal{S}_n$, et $\text{Sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres dans $\mathbb{R}$.
 - (a) Montrer que : $A \in \mathcal{S}_n$ si et seulement si $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$.
 - (b) Montrer que : $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ si et seulement si $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.
9. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - (a) Montrer que A est dans $\mathcal{S}_n^+$ si et seulement si il existe M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $A = {}^t M M$.
 - (b) Montrer que A est dans $\mathcal{S}_n^{++}$ si et seulement si il existe M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $\det(M) \neq 0$, telle que $A = {}^t M M$.
10. Soient A et A' dans $\mathcal{S}_n^+$.
 - (a) Montrer que $\text{tr}(AA') \geq 0$ et, lorsque A et A' sont dans $\mathcal{S}_n^{++}$, alors $\text{tr}(AA') > 0$. (Pour les questions (b) et (c) qui suivent, on distinguera les cas $\det(A) = 0$ et $\det(A) > 0$, et, dans ce dernier cas, on pourra avoir recours à une base orthonormale pour le produit scalaire défini par A .)
 - (b) On suppose que $A \leq A'$, montrer que $\det(A) \leq \det(A')$.
 - (c) Montrer qu'en général $\det(A + A') \geq \det(A) + \det(A')$. Préciser dans quel cas on a égalité.

11. On considère $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $U = (u_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ tous les deux dans $\mathcal{S}_n^+$. On définit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la manière suivante : pour tous i, j le coefficient d'indice (i, j) de C vaut : $c_{ij} = a_{ij}u_{ij}$.
Montrer que $C \in \mathcal{S}_n^+$, et que dans le cas où A et U sont dans $\mathcal{S}_n^{++}$ alors C est aussi dans $\mathcal{S}_n^{++}$. (On pourra encore utiliser une base convenable.)
12. Soit A dans $\mathcal{S}_n^+$ et k dans $\mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe une unique matrice B dans $\mathcal{S}_n^+$ telle que $A = B^k$.
13. Soit A dans $\mathcal{S}_n^+$ telle que $A \leq I_n$. On définit la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$$M_0 = O_n, \text{ et pour } k \in \mathbb{N}, M_{k+1} = \frac{1}{2} (I_n - A + M_k^2).$$

Montrer que $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une certaine matrice L de $\mathcal{S}_n^+$ telle que $L \leq I_n$ et vérifiant : $(I_n - L)^2 = A$. (On pourra encore choisir une base convenable.)

14. Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^+$, et soit $M = AB$.
- (a) Montrer que M a toutes ses valeurs propres dans $\mathbb{R}$.
 - (b) Montrer que si de plus $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ alors M est diagonalisable.

FIN DE L'ÉPREUVE