Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoire
aux Grandes Écoles
Khouribga

Année scolaire : 2012/2013
Filière **MP**

DEVOIR SURVEILLÉ COMMUN N°5

09/02/2013

durée : 4 heures

••••••••

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

EXERCICE : TRANSFORMÉE DE FOURIER

On pose pour f une fonction réglée, intégrable sur $\mathbb{R}$:

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{itx}dt$$

la fonction $\widehat{f}$ est appelée la transformée de Fourier de f.

1. Démonter que la transformée de Fourier d'une fonction réglée intégrable sur $\mathbb{R}$, est définie sur $\mathbb{R}$.
2. (a) On suppose que f est continue intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\widehat{f}(x) = 0$.
   (b) Reprendre la même question avec f réglée sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose f continue et $t \mapsto t^k f(t)$ ($k = 1, 2$) intégrable sur $\mathbb{R}$. Démonter que $\widehat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et préciser ses dérivées.
4. (a) Calculer la transformée de Fourier de $f : t \mapsto e^{-t^2}$. (on donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.)
   (b) On pose, pour $x > 0$, $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2}dt$. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et que $g''(x) = g(x)$. En déduire $g(x)$ puis la transformée de Fourier de l'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$.

L'objet du problème, à travers de plusieurs exemples, l'étude de la suite puis éventuellement de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\ln x dx$, où pour tout n de $\mathbb{N}$, f_n est une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Préliminaire

1. Soient a et b réels tels que $a < b$. Soit g une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ à valeurs réelles. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\displaystyle\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)dt$ tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$.

2. Soient α et β deux réels. Calculer l'intégrale
$$I_{\alpha,\beta} = \int_0^\pi (\alpha x + \beta x^2)\cos(kx)dx, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$
Trouver α et β de façon que l'on ait $I_{\alpha,\beta} = \dfrac{1}{k^2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall x \in]0,\pi],\ \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{1}{2}\Big(\sin(nx)\text{cotan}\left(\frac{x}{2}\right) + \cos(nx) - 1\Big).$

4. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Première partie

1. Établir l'existence de u_n pour tout n de $\mathbb{N}$.

2. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers f. Établir la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et exprimer sa limite à l'aide de f.

3. On définit f_n par : $f_n(x) = n^3x^n(1-x)$.
   (a) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement, uniformément sur $[0,1]$?
   (b) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Que peut-on remarquer ?

4. On définit f_n par : $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$.
   (a) Étudier la convergence simple, uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$.
   (b) Calculer u_n pour tout n de $\mathbb{N}$. En déduire la nature de la suite et de la série de terme général u_n.
   (c) En exprimant de deux façons la somme de la série de terme général u_n, prouver la relation suivante :
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

Deuxième partie

On choisit dans toute cette partie

$$f_n : \begin{array}{ll} [0,1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto (x-1)^n \end{array}$$

1. Étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Établir pour tout α réel de $]0,1]$ l'inégalité

$$\left|\int_0^{\alpha}(x-1)^n \ln x dx\right| \leq \alpha - \alpha\ln\alpha.$$

   Démontrer alors la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite ?
3. Démontrer la convergence de la série de terme général u_n.
4. Établir l'égalité :

$$|u_n| = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{1-(1-x)^{n+1}}{x}dx.$$

   En déduire :

$$|u_n| = \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}\right).$$

   Que dire de la convergence de la série numérique de terme général u_n ?
5. Démontrer la relation : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\ln x}{2-x}dx.$
6. À l'aide de changement de variable et intégration par parties, déterminer une relation simple entre

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x}dx \quad \text{et} \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x}dx.$$

   En déduire grâce au $I-4-c$ la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x}dx$, puis de la somme de la série de terme général u_n.
7. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on considère la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par :

$$h_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n}{2^{n+1}}\ln x & \text{si } x\in]0,1] \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

   (a) Montrer que la série de fonctions h_n, $n\in\mathbb{N}^*$, converge uniformément sur $[0,1]$.

   (b) Calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^2}$.

FIN DE L'ÉPREUVE