

**DEVOIR SURVEILLÉ
COMMUN N°6**

16/03/2013

durée : 4 heures

• • • • •

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

EXERCICE : SÉRIES DE FOURIER

1. On considère la fonction g de la variable réelle définie par : $g(u) = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(tu) dt$.

(a) Montrer que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer, pour tout $u > 1$, un réel α_u dans $]0, 1[$ tel que $\int_{\alpha_u}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{u}}$.

(c) Dériver $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ et intégrer par parties $\int_0^{\alpha_u} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(tu) dt$ pour en déduire que :

$$\forall u > 1, |g(u)| \leq \frac{3}{\sqrt{u}}.$$

2. Soit f la fonction 2π -périodique sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à $] -\pi, \pi[$ est représentée dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par le demi-cercle de centre O , de rayon π et d'ordonnées positives.

(a) Pour tout $x \in] -\pi, \pi[$, donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x .

(b) Le théorème de Dirichlet s'applique-t-il à la fonction f ?

3. (a) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de Fourier trigonométriques de f notés a_n et b_n .

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{2}{n} g(\pi n)$.

4. (a) Établir la convergence normale de la série de Fourier de f . Cela contredit-il la question 2.(b) ?

(b) Montrer à l'aide du théorème de Parseval que la série de Fourier de f converge vers f .

$l^1(\mathbb{R})$ désigne, dans tout le problème, le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des suites réelles $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ soit absolument convergente.

E est le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, continues, et pour $f \in E$, $\|f\|_\infty$ est le réel défini par : $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$.

I. QUESTIONS PRÉLIMINAIRES

1. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : l^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \|a\| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \end{aligned}$$

où $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est une norme sur $l^1(\mathbb{R})$ et que muni de cette norme $l^1(\mathbb{R})$ est complet.

2. Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de $l^1(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ converge et que l'application $f_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est un élément de E .

II. FORMES LINÉAIRES CONTINUES SUR $(l^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$

1. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, bornée. Montrer que l'application φ de $l^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ (à justifier) définie pour tout $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\varphi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$ est une forme linéaire continue sur $(l^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$. Déterminer la norme de φ .
2. Réciproquement, soit φ une forme linéaire continue sur $(l^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$. Montrer qu'il existe, et de manière unique, une suite réelle $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, bornée, telle que :

$$\forall a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{R}), \quad \varphi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n.$$

1. Soit $(a^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de points de $l^1(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $a^k = (a^k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ et on suppose que la suite $(a^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $(l^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$.
On désigne par f_k l'élément noté en I.2. f_{a^k} . Montrer que la suite des fonctions $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$.

2. Soit $(a^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite de points de $l^1(\mathbb{R})$ définie, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ par : $a^k = (a^k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ où

$$\begin{cases} a^k(0) = 0 \\ a^k(n) = \frac{\sin n}{n} \text{ si } n \leq k \\ a^k(n) = 0 \text{ si } n \geq k+1 \end{cases}$$

f_k représentant toujours l'élément de E associé comme en I.2. à la suite a^k . Montrer que la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

La suite $k \mapsto a^k$ converge-t-elle dans $(l^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$?

3. Soit $k \mapsto a^k$, $k \geq 1$, une suite d'éléments de $l^1(\mathbb{R})$ avec pour tout k : $a^k = (a^k(n))_{n \in \mathbb{N}}$. On suppose que :

$$(\exists M > 0), (\forall k \geq 1), (\forall n \in \mathbb{N}), \left(|a^k(n)| \leq M \right)$$

et qu'en outre la suite $(f_k)_{k \geq 1}$ de E définie par : $f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^k(n)x^n$ converge vers 0 dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Montrer qu'alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{k \rightarrow \infty} a^k(n) = 0$.

4. Soit $(a^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de points de $l^1(\mathbb{R})$ avec $a^k = (a^k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ et f_k l'élément de E défini par :

$$\forall x \in [-1, 1], f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^k(n)x^n.$$

On suppose :

- (i) La suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$.
- (ii) Il existe $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}, \alpha \in l^1(\mathbb{R})$, avec $|a^k(n)| \leq \alpha_n$ pour tous n et k de $\mathbb{N}$.

Montrer qu'alors la suite $(a^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $(l^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$.

IV. APPLICATION LINÉAIRE $\mathcal{C}^0$ DE $l^1(\mathbb{R})$ DANS $l^1(\mathbb{R})$

1. Soit a un élément de $l^1(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout x de $l^1(\mathbb{R})$ la suite $a * x$ appartient à $l^1(\mathbb{R})$. ($a * x$ est la suite dont le terme général d'ordre n est égal à $\sum_{k=0}^n a_k x_{n-k} = \sum_{p+q=n} a_p x_q$)

2. En déduire que l'application $\psi_a : l^1(\mathbb{R}) \rightarrow l^1(\mathbb{R})$ définie par $x \mapsto a * x$ est linéaire et continue.
Comparer sa norme à celle de a .

V. EXEMPLES D'ÉLÉMENTS DE $l^1(\mathbb{R})$

1. Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs telle que :

(i) $\forall x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ converge.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ existe.

Montrer alors que $a \in l^1(\mathbb{R})$ et à l'aide d'un exemple vérifier que l'hypothèse $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une hypothèse essentielle.

2. Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n, z \in \mathbb{C}$, ait un rayon de convergence égal à 1, on suppose qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$(\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1) \Rightarrow \left(\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| \leq M \right).$$

Démontrer que la suite $(|a_n|^2)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans $l^1(\mathbb{R})$.

3. Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$. La suite a est-elle dans $l^1(\mathbb{R})$?
4. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = \frac{1}{(2n)!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^{|x|}} x^{2n} dx$. Vérifier que la suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans $l^1(\mathbb{R})$ et montrer que $\|a\| = 2 \int_0^{+\infty} e^{-e^x} \operatorname{ch}(x) dx$.
5. Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $a_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$.
Montrer que $a \in l^1(\mathbb{R})$ et exprimer sa norme à l'aide d'une intégrale. Justifier l'inégalité $\|a\| \geq \frac{\pi}{2}$.

FIN DE L'ÉPREUVE