*Devoir surveillé
commun n°1*

21/09/2013

durée : 3 heures

•••••

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

•••••

Problème I : Le but de ce problème est de démontrer le théorème du point fixe, ce qui fait l'objet de la partie I, et d'en voir quelques applications élémentaires dans la partie II. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Partie I : Le théorème du point fixe de PICARD

Dans cette partie $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach et $f : E \rightarrow E$ est une contraction stricte de rapport k ($k \in]0, 1[$).

Pour tout $a \in E$ on considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = a$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout n entier naturel.

Pour tout n entier naturel, on pose $u_n = x_{n+1} - x_n$.

1. Démontrer que pour tout n entier naturel, on a $\|u_{n+1}\| \leq k\|u_n\|$ puis que

$$\|u_n\| \leq k^n \|f(a) - a\|.$$

En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

2. Démontrer alors que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur l de E .
3. Prouver que l est un point fixe de f , c'est-à-dire $f(l) = l$.
4. Démontrer que f admet en fait un unique point fixe.

Partie II : Exemples et contre-exemples

1. **Sur la nécessité d'avoir une contraction stricte**

On considère ici la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(t) = t + \frac{\pi}{2} - \arctan t.$$

- a) Démontrer que pour tout t réel, on a $|g'(t)| < 1$. En déduire que l'on a pour x et y réels :

$$|g(x) - g(y)| < |x - y|.$$

- b) La fonction g admet-elle un point fixe ? Est-elle une contraction stricte ?

2. Un exemple

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout x réel, on ait :

$$f(x) = f \circ g(x) \text{ où } g(x) = \frac{x}{5} + 1$$

- a) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{5} + 1$ pour tout n entier naturel. Démontrer en utilisant le théorème de PICARD que cette suite converge vers un réel l que l'on précisera.
- b) Démontrer que pour tout n entier naturel et tout x réel, on a : $f(g^n(x)) = f(x)$.
- c) En déduire que f est constante.

3. Un système non linéaire dans $\mathbb{R}^2$

On s'intéresse dans cette question au système :

$$(s) \begin{cases} 4x = \sin(x + y) \\ 3y = 3 + 2 \arctan(x - y) \end{cases}$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par : $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ et on considère l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\psi(x, y) = \left(\frac{1}{4} \sin(x + y), 1 + \frac{2}{3} \arctan(x - y) \right).$$

- a) Pourquoi l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ est-il complet ?
- b) Démontrer que pour tout a et b , on a :
- $$|\sin b - \sin a| \leq |b - a| \text{ et } |\arctan b - \arctan a| \leq |b - a|$$
- c) Prouver que ψ est une contraction stricte de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$.
- d) En déduire que le système (S) admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.
- e) Ici $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$ qui en fait un espace de Banach.
 Déterminer $\|\psi(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) - \psi(0, 0)\|_\infty$.
 L'application ψ est-elle encore une contraction stricte pour la norme $\|\cdot\|_\infty$?
 Quel commentaire peut-on faire ?

Problème II : Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, sur $\mathbb{R}$. On rappelle que $\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E , que id_E est l'application identique de E . Deux éléments p_1 et p_2 de $\mathcal{L}(E)$ sont des projecteurs associés s'il existe dans E deux sous-espaces supplémentaires E_1 et E_2 tels que :

$$\forall x \in E, \begin{cases} x = p_1(x) + p_2(x) \\ p_1(x) \in E_1, p_2(x) \in E_2 \end{cases}$$

1. p_1 et p_2 sont ici deux projecteurs associés.
 - a) Déterminer le noyau, l'image de p_1 puis de p_2 .
 - b) Calculer $p_1 + p_2$, $p_1 \circ p_2$, $p_2 \circ p_1$, p_1^2 et p_2^2 .
2. Dans cette question, on suppose que E est un espace vectoriel de dimension 3, rapporté à une base (e_1, e_2, e_3) . Soit E_1 la droite vectorielle engendré par $u_1 = (\alpha, \beta, \gamma)$ et E_2 le plan vectoriel d'équation $px + qy + rz = 0$, où $\alpha, \beta, \gamma, p, q$ et r sont des réels donnés tels que $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ et $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$.
 - a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que E_1 et E_2 soient supplémentaires.
Dans la suite de la question, on suppose que $p\alpha + q\beta + r\gamma = 1$.
 - b) Soit x un vecteur de E . Déterminer sa décomposition comme somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2 .
 - c) En déduire les matrices M_1 et M_2 des projecteurs associés p_1 et p_2 .
 - d) On suppose ici que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ et que M_1 est symétrique. Écrire M_1 et M_2 en fonction seulement de p, q et r .

PARTIE II. CARACTÉRISATION DES PROJECTEURS ASSOCIÉS

On dit que f et g , endomorphismes de E , vérifient la proposition (1) si et seulement si on a à la fois les deux conditions :

$$f \circ g = 0 \quad \text{et} \quad f + g = id_E$$

De même, on dit que l'endomorphisme f de E vérifie la proposition (2) si et seulement si on a la condition :

$$f \circ f = f.$$

1. Soient (f, g) un couple d'endomorphismes de E . On suppose que f et g vérifient (1). Montrer que f puis g vérifient (2).
2. Montrer qu'inversement à tout endomorphisme f de E qui vérifie (2) correspond un autre endomorphisme g de E vérifiant (2) tel que f et g vérifient (1).
3. On veut montrer ici que deux endomorphismes de E , f et g sont des projecteurs associés si, et seulement si, ces endomorphismes vérifient (1).
Dans la suite de la question, on suppose que f et g vérifient (1).
 - a) Que peut-on dire de la restriction de f à $\text{Im} f$?
 - b) Montrer que $\text{Ker} f$ et $\text{Im} f$ sont supplémentaires dans E .
 - c) Comparer $\text{Ker} f$ et $\text{Im} g$.
 - d) Conclure.

PARTIE III. COMBINAISONS LINÉAIRES DE PROJECTEURS ASSOCIÉS

On désire ici étudier les endomorphismes f de E vérifiant l'égalité (3) :

$$(f - a\text{id}_E) \circ (f - b\text{id}_E) = 0$$

où (a, b) est un couple de réels donnés distincts, on note $\mathcal{F}$ les sous-ensemble de $\mathcal{L}(E)$ constitué des endomorphismes vérifiant (3).

1. $\mathcal{F}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$?
2. Soient p_1 et p_2 deux projecteurs associés de E différentes de id_E et 0.
 - a) Montrer que (p_1, p_2) est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.
 - b) Déterminer tous les couples de réels (α, β) tels que

$$f = \alpha p_1 + \beta p_2$$

vérifie la condition (3).

Dans la suite, f est un élément de $\mathcal{F}$.

3. Montrer que les deux sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(f - a\text{id}_E)$ et $\text{Ker}(f - b\text{id}_E)$ sont supplémentaires dans E .
4. Montrer que f s'écrit d'une façon unique sous la forme

$$f = af_1 + bf_2$$

où f_1 et f_2 sont deux projecteurs associés de E que l'on calculera en fonction de f, a et b .
On supposera cette décomposition connue dans la suite.

5. n désigne ici un entier supérieur ou égal à 1.
 - a) Montrer que $f^n = a^n f_1 + b^n f_2$.
 - b) Montrer que f vérifie une égalité du type :

$$(f^n - \lambda\text{id}_E) \circ (f^n - \mu\text{id}_E) = 0$$

et déterminer un couple (λ, μ) qui convienne.

FIN DE L'ÉPREUVE