Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoire
aux Grandes Écoles
Khouribga

Année scolaire : 2013/2014
Filière **MP**

*Devoir surveillé
commun n°2*

26/10/2013

durée : 4 heures

•••••

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

•••••

Exercice : Soient des nombres réels strictement positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, et soit

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}_+)^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

On notera

$$C = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n / \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 1\}.$$

1. Montrer qu'il existe $a = (a_1, \dots, a_n) \in C$ tel que $f(a) = \sup_{x \in C} f(x)$, et que $a_i > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
2. Trouver tous les points $a \in C$ tels que $f(a) = \sup_{x \in C} f(x)$. En déduire que pour tout $x \in C$, $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \leq 1$.
3. Montrer que pour tout $x \in (\mathbb{R}_+)^n$,

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

Dans quel(s) cas a-t-on égalité ?

4. On considère dans $\mathbb{R}^3$ un parallélépipède rectangle dont les cotés ont respectivement pour longueur x, y et z . On note V son volume et S l'aire de sa surface. En exprimant S et V en fonction de x, y et z , et en utilisant ce qui précède montrer que

$$V^{\frac{2}{3}} \leq \frac{S}{6}.$$

Comment obtenir un parallélépipède rectangle de surface minimale à volume donné ?

Problème : n est un entier supérieure ou égal à 1 fixé. Dans tout le problème $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une matrice carrée $n \times n$, symétrique à éléments réels.

On note $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$.

On considère l'application $D : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ qui à f associe l'application

$$Df = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

C'est une application linéaire dont on notera $\mathcal{N}$ le noyau. Le but du problème est de chercher les application $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$ qui conservent $\mathcal{N}$, c'est-à-dire qui vérifient la propriété :

$$\text{si } f \in \mathcal{N} \text{ alors } f \circ u \in \mathcal{N},$$

ce qui se traduit par :

$$\text{si } Df = 0 \text{ alors } D(f \circ u) = 0.$$

Notations :

- Si u est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, on notera $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ où les $u_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ représentent les applications coordonnées de u .
- Si de plus u est de classe $\mathcal{C}^1$, on notera $J_x(u) = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \right]_{1 \leq i, j \leq n}$ sa matrice jacobienne au point $x \in \mathbb{R}^n$. On notera $\det J_x(u)$ le déterminant de $J_x(u)$.
- Enfin si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, on notera $H_x(f) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right]_{1 \leq i, j \leq n}$ appelée matrice hessienne de f au point $x \in \mathbb{R}^n$.

La partie II est la suite logique de la partie I. Mais elle peut être traitée indépendamment de celle-ci.

PARTIE I

Dans cette partie, u désigne une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$ et telle que u conserve $\mathcal{N}$ (c'est-à-dire si $Df = 0$ alors $D(f \circ u) = 0$).

1. Montrer que les applications composantes de u appartiennent à $\mathcal{N}$. Pour montrer que $Du_k = 0$, on pourra considérer $f_k : x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_k$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$.

a) Exprimer $\frac{\partial(f \circ u)}{\partial x_i}$ en fonction de $\frac{\partial u_k}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ et de u .

b) En appliquant deux fois cette relation, montrer que

$$\frac{\partial^2(f \circ u)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} \right) \circ u + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \circ u$$

c) Interpréter l'ensemble de ces égalités pour $1 \leq i, j \leq n$ comme une identité matricielle, qui exprime $H_x(f \circ u)$ en fonction de ${}^t J_x(u)$, $H_{u(x)}(f)$, $J_x(u)$ et des $\frac{\partial f}{\partial x_k}[u(x)]$ et $H_x(u_k)$.

Nota : Si $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^t M$ désigne sa transposée telle que ${}^t M = (m_{ji})_{1 \leq i, j \leq n}$.

3. Si $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{ii}$ sa trace. On notera aussi $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques à éléments réels.

a) Montrer que $(V, W) \mapsto \text{tr}(VW)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

b) Soient V_1 et V_2 deux éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$:

$$\text{si } \text{tr}(V_1 S) = 0 \text{ alors } \text{tr}(V_2 S) = 0.$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $V_2 = \lambda V_1$.

4. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$.

a) Montrer que $Df(x) = \text{tr}[AH_x(f)]$.

b) Montrer que $D(f \circ u)(x) = \text{tr}[A^t J_x(u) H_{u(x)}(f) J_x(u)]$.

5. a) Soit $S = (s_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ un élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij} x_i x_j.$$

Calculer $H_x(q)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. En considérant $V_1 = A$ et $V_2 = J_x(u) A^t J_x(u)$, montrer qu'il existe $\lambda(x) \in \mathbb{R}$ tel que

$$J_x(u) A^t J_x(u) = \lambda(x) A.$$

c) En déduire que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n), \forall x \in \mathbb{R}^n, D(f \circ u) = \lambda(x) \cdot Df[u(x)].$$

PARTIE II

Dans cette partie on suppose que la matrice A est inversible, et on notera $B = A^{-1}$ son inverse. On notera $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ pour désigner ses éléments.

Dans cette partie u désigne une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que :

(1) $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, Du_k = 0$.

(2) Il existe $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n, J_x(u) A^t J_x(u) = \lambda(x) A$.

(3) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \det(J_x(u)) \neq 0$.

1. a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda(x) \neq 0$.

b) Montrer que $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$.

c) Montrer $\forall x \in \mathbb{R}^n, {}^t J_x(u) B J_x(u) = \lambda(x) \cdot B$.

2. Montrer que pour tous i, j, k tels que $1 \leq i, j, k \leq n$:

$$\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n b_{pq} \frac{\partial u_p}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_j} b_{ki} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} b_{kj} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} b_{ij} \right).$$

Indication : Dériver par rapport x_k la quantité $\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n b_{pq} \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial u_q}{\partial x_j}$ et écrire

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_k \partial x_i} \frac{\partial u_q}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial u_p}{\partial x_k} \frac{\partial u_q}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial u_p}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j}.$$

3. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(n-2) \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} = 0$.

On calculera à cet effet :

$$\sum_{i,j} \sum_{p,q} a_{ij} b_{pq} \frac{\partial u_p}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j}.$$

4. On suppose $n \neq 2$.

a) Montrer que λ est constant et déduire de 2. que $\forall i, j, q, \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_i \partial x_j} = 0$.

b) Prouver que u est une application affine. Que peut-on dire de sa partie linéaire ?

c) Étudier le signe de λ en fonction de la signature de la forme quadratique dont la matrice est B dans la base canonique.

5. On suppose $n = 2$, et on prend pour A la matrice $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On considère

$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui à $x = (x_1, x_2)$ associe $u(x) = (e^{x_1} \cos x_2, e^{x_1} \sin x_2)$.

Montrer que u satisfait les conditions (1), (2) et (3) mais que u n'est pas affine.

FIN DE L'ÉPREUVE