Devoir surveillé n°3

30/11/2013

durée : 4 heures

••••••••

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

••••••••

NOTATIONS

- $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (resp.$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$) désigne l'espace vectoriel des matrices à n lignes et à p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)
- Si $n = p$ on écrit $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathscr{M}_{n,n}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
- Si $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, ${}^tA$ désigne selon l'usage la matrice transposée de A, et $|A|$ la matrice de coefficient générique $|a_{ij}|$.
- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\chi_A = \det(A - XI_n)$ le polynôme caractéristique de A.
- La matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ sera notée $\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Convention

On identifie $\mathbb{C}^p$ à $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C})$, et pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, et $x \in \mathbb{C}^p$, $(Ax)_i$ désigne le i-ième coefficient de la matrice unicolone Ax.

DÉFINITIONS

Définition 1 : Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux éléments de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- On écrit $A \leq B$ si, et seulement si, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{ij} \leq b_{ij}$.
- On écrit $A < B$ si, et seulement si, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{ij} < b_{ij}$.

Définition 2 :

- A est dite ***positive*** lorsque $0 \leq A$, c'est-à-dire $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{ij} \geq 0$.
- A est dite ***strictement positive*** lorsque $0 < A$, c'est-à-dire $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{ij} > 0$.

Définition 3 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Si $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ (les valeurs propres, non nécessairement distinctes, de A sont $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$), le réel positif $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ est appelé ***rayon spectral*** de A.

Partie 1 : Préliminaires

1. Soient $(A, A') \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C}^p$. vérifier les assertions suivantes :
   a) $|A + A'| \leq |A| + |A'|$, $|AB| \leq |A||B|$.
   b) $|Ax| \leq |A||x|$ et, de plus, si $0 < A$, $0 < x$ et $x \neq 0$, alors $Ax > 0$.
   c) Si $0 \leq A$ et $0 < x$, l'égalité $Ax = 0$ implique $A = 0$.

2. a) Soient z et z' des complexes tels que $|z + z'| = |z| + |z'|$, avec $z \neq 0$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $z' = \alpha z$.
   b) En déduire que si $z_1, z_2, ..., z_n$ sont n nombres complexes ($n \geq 2$) tels que
   $$|z_1 + z_2 + ... + z_n| = |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|,$$
   alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $z_k = e^{i\theta}|z_k|$.
   c) On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, avec $0 < A$. Soit $x \in \mathbb{C}^n$. Montrer que
   $$|Ax| = A|x| \Longrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad x = e^{i\theta}|x|.$$

3. Soit $F \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $A = |F|$. Montrer que s'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ avec $0 < x$, tel que $Ax = Fx$, alors on a $A = F$.

4. Une norme $\|.\|$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dite ***sous-multiplicative*** si, et seulement si,
   $$\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \quad \|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$
   On munit $\mathbb{C}^n$ de la norme
   $$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \|x\| = \sup_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$
   a) Justifier brièvement que l'application $\|.\|_\infty : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$, définie par $\|A\|_\infty = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
   b) On pose $A = (a_{ij})$. Vérifier que $\|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$.
   c) Montrer que $\|.\|_\infty$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est sous-multiplicative.

Partie 2 : Étude du rayon spectral d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

Dans toute la suite du problème, on munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative $\|.\|$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\rho(A) \leq \|A\|$.

2. Soit S une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
   a) Comparer $\rho(A)$ et $\rho(S^{-1}AS)$.

b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\rho(A^k) = (\rho(A))^k$, et en déduire que $\rho(A) \leq \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$.

c) Montrer que l'application $N : X \longmapsto \|S^{-1}XS\|$ est encore une norme sous-multiplicative sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $T = (t_{ij})$ une matrice triangulaire semblable à A.

a) Calculer la matrice $\triangle^{-1}T\triangle$, avec $\triangle = \operatorname{diag}(1, d, d^2, ..., d^{n-1})$ où $d > 0$.

b) En déduire l'existence d'une norme sous-multiplicative N sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$N(A) \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

a) On suppose $\rho(A) < 1$. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$.

b) Trouver une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) = 1$ et que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas bornée.

c) Montrer que $\rho(A) = \lim\limits_{k\to+\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$.

Pour cela, $\varepsilon > 0$ étant fixé, on considérera la matrice $A_\varepsilon = \dfrac{1}{\rho(A)+\varepsilon}A$, et on utilisera la question $4.(a)$ de cette partie.

5. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $|A| \leq B$.

a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a : $|A^k| \leq |A|^k \leq B^k$.

b) En déduire que $\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B)$.

Partie 3 : Propriétés des matrices carrées réelles positives

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ positive ($A \geq 0$, c'est-à-dire $\forall (i, j)\ a_{ij} \geq 0$).

1. On suppose, dans cette question seulement, que la matrice A vérifie :

$$\text{Il existe } s \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = s.$$

Montrer que s est une valeur propre de A et que $\rho(A) = s = \|A\|_\infty$.

2. On pose $\alpha = \inf\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$ et $\beta = \sup\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = \|A\|_\infty$.

a) Trouver une matrice $B = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $0 \leq B \leq A$ et que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} = \alpha$.

b) En déduire l'encadrement

$$\alpha \leq \rho(A) \leq \beta.$$

3. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 < x$. On pose $D_x = \operatorname{diag}(x_1, ..., x_n)$. Calculer la matrice $D_x^{-1}AD_x$ et en déduire l'encadrement :

$$\inf_{1\leq i\leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \leq \rho(A) \leq \sup_{1\leq i\leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i}.$$

4. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 < x$, et r un réel positif ou nul.

   a) Montrer que si $Ax = rx$ alors $\rho(A) = r$.

   b) Comparer $\rho({}^tA)$ et $\rho(A)$ et en déduire que si ${}^txA = r{}^tx$, alors $\rho(A) = r$.

5. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 < x$. On désigne par α et β deux réels positifs ou nuls.

   a) Montrer les implications :

   $\alpha x \leq Ax(\text{resp.} < Ax) \Longrightarrow \alpha \leq \rho(A)(\text{resp.} < \rho(A))$.
   $Ax \leq \beta x(\text{resp.} < \beta x) \Longrightarrow \rho(A) \leq \beta(\text{resp.} < \beta)$.

   b) En déduire les implications :

   $\alpha{}^tx \leq {}^txA(\text{resp.} < {}^txA) \Longrightarrow \alpha \leq \rho(A)(\text{resp.} < \rho(A))$.
   ${}^txA \leq \beta{}^tx(\text{resp.} < \beta{}^tx) \Longrightarrow \rho(A) \leq \beta(\text{resp.} < \beta)$.

Partie 4 : Étude des matrices carrées réelles strictement positives

On suppose que $A = (a_{ij})$ est une matrice strictement positive de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ($A > 0$, c'est-à-dire $\forall(i,j)\ a_{ij} > 0$). On pose $r = \rho(A)$.

1. Vérifier que l'on a $r > 0$.

2. Soit $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \leq y$ et $y \neq 0$. On suppose que $ry \leq Ay$.

   a) On pose $v = Ay$ et $z = Ay - ry$. Vérifier que $v > 0$ et montrer que la relation $rv < Av$ est impossible.

   b) En déduire que : $ry = Ay$.

3. Soit x un vecteur propre (non nul) associé à une valeur propre λ de A vérifiant $|\lambda| = r$.

   a) Montrer que $A|x| = r|x|$ et en déduire $|x| > 0$.

   b) Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^{i\theta}|x|$.

4. a) Déduire de ce qui précède que r est effectivement valeur propre de A, et qu'il s'agit de l'unique valeur propre de A de module égal à r.

   b) Montrer que les sous-espace propre $\operatorname{Ker}(A - rI_n)$ est associé à r est une droite vectorielle engendrée par un vecteur $v > 0$.
   (On pourra raisonner par l'absurde, en supposant $\dim(\operatorname{Ker}(A - rI_n)) \geq 2$).

5. On fixe $v > 0$, vecteur directeur de $\operatorname{Ker}(A - rI_n)$. Montrer que qu'il existe un unique vecteur $w \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$w > 0; \quad {}^twA = r{}^tw; \quad {}^twv = 1$$

FIN DE L'ÉPREUVE